Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Сластников Александр Дмитриевич

СТИМУЛИРОВАНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

5.2.2 — Математические, статистические и инструментальные
методы в экономике (экономические науки)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора экономических наук

Научный консультант:
академик РАН Полтерович Виктор Меерович

Москва 2023

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Развитие экономики трудно представить без инвестиционных проектов в реальном секторе, важных как для отдельных регионов, так и для страны в целом. Однако их реализация в переходных и развивающихся экономиках, в том числе в российской, сталкивается с рядом проблем, связанных с неблагоприятным инвестиционным климатом. Среди причин, ухудшающих инвестиционный климат, эксперты выделяют нестабильность политической и экономической ситуации (малопредсказуемые изменения в законодательстве, несогласованность действий органов власти различных уровней), политику санкций со стороны западных партнеров, несовершенство законодательной базы, обременительную налоговую систему, недостаточное инфраструктурное и институциональное развитие. К ним еще добавляется высокая неопределенность и риски, порождаемые мировым рынком. В развивающихся экономиках возникают и дополнительные факторы риска, к которым можно отнести инфляцию, неплатежи и срыв поставок продукции, непредсказуемые действия властей, бюрократические препятствия, организованную преступность и коррупцию и т.д.

В этих условиях инвесторы предпочитают откладывать начало реализации проектов до наступления более благоприятной ситуации — возникают хорошо знакомые российской экономике задержки инвестиций (ожидания инвестиций или инвестиционные ожидания). Если государство (в лице региона или федерального центра) заинтересовано в реализации проекта, оно может стимулировать инвестора, предоставляя для реализации проекта определенные льготные условия. Для стимулирования инвестиций применяются различные механизмы, включающие как налоговые льготы, так и меры неналоговой государственной поддержки. Эффективность налоговых льгот является предметом многочисленных дискуссий и обсуждений в научной литературе, вопросы оптимизации и адресной направленности механизмов стимулирования инвестиционной деятельности (налоговых и других) постоянно поднимаются на государственном уровне и в различных программных документах. Все это делает актуальной задачу исследования потенциальных возможностей различных механизмов государственной поддержки (как налоговых, так и неналоговых) реализации инвестиционных проектов.

Степень разработанности проблемы. Исследование инвестиционных проектов представляет собой обширный и достаточно разработанный раздел экономической теории и ее приложений. Меньше внимания уделяется ситуации, когда оценивание и реализация проектов происходит в условиях неопределенности и риска. Наличие этих факторов вызывает появление целого ряда новых проблем, связанных, в частности, как с оценкой проектов, так и с принятием инвестиционных решений. Существуют различные подходы к определению, формализации и интерпретации понятия неопределенности: вероятностный (в том числе субъективные вероятности), интервальный, популярная в последнее время теория нечетких множеств, а также различные их комбинации. Подробно эти подходы (развитие которых связано с работами Т. Байеса, Б. де Финетти, Л. Сэвиджа, Л. Гурвица, Л. Заде), их достоинства и недостатки изложены, например, в монографиях П.Л. Виленского, В.Н. Лившица, С.А. Смоляка [40] и С.А. Смоляка [81]. Проблемы, связанные с учетом различных экономических рисков, описаны, в частности, в монографиях М.В. Грачевой [47], Р.М. Качалова [54], Г.Б. Клейнера, В.Л. Тамбовцева, Р.М. Качалова [57].

В настоящей работе используется вероятностный подход к описанию и оценке проектов в условиях неопределенности. При этом результаты и затраты при осуществлении проекта моделируются как реализации некоторых случайных процессов, параметры которых могут быть оценены по данным проекта.

Для стимулирования инвестиционной активности (в том числе, для реализации инвестиционных проектов) государство может использовать несколько различных подходов. Один из них связан с общим улучшением инвестиционного климата, в том числе, макроэкономическими и регуляторными мерами, чтобы укрепить бизнес-среду и повысить доверие со стороны инвесторов. Другой подход основан на стимулировании инвесторов с помощью различных льгот и преференций как налогового, так и неналогового характера. Анализ мирового опыта предоставления налоговых льгот не дает однозначного ответа на вопрос об их эффективности и влиянии на экономическое развитие. В научной литературе существует несколько различных точек зрения на эффективность и роль налоговых льгот в экономике.

В рамках одной из них отмечается, что налоговые льготы и преференции способны стимулировать развитие отдельных видов деятельности, отраслей и территорий, формировать эффективную бизнес-среду. Однако введение налоговых льгот может приводить к искажениям таких базовых принципов налогообложения, как нейтральность, справедливость, эффективность, вести к снижению собираемых государством налоговых доходов, особенно, при недостаточной адресной направленности льгот. При этом, потери доходов бюджета от применения налоговых льгот (даже при отсутствии прямых бюджетных затрат) часто могут не компенсироваться теми выгодами, для достижения которых государство их предоставляло [66, 68]. По оценкам Минфина РФ, налоговые расходы ежегодно приводят к выпадению из доходов консолидированного бюджета России более 2% ВВП (а в последние годы больше 3%) [66, 83, 72].

Изложенная точка зрения, связанная с выпадающими доходами бюджета, во многом справедлива, на наш взгляд, для уже сложившейся (к рассматриваемому моменту времени) структуры налогоплательщиков и системы налоговых льгот и освобождений. Однако в данной работе исследуется принципиально другая ситуация, когда новый налогоплательщик и соответствующие налоговые поступления в бюджет (с учетом предоставленных ему льгот) могут появиться только при реализации инвестиционного проекта *в будущем* (например, будет создаваться и функционировать новое предприятие в реальном секторе). В этом случае во внимание уже должен приниматься фактор времени, связанный с тем, насколько "рано" проект начнет реализовываться и приносить налоги в бюджет, а предоставляемые льготы должны корректироваться с учетом *возможного времени инвестирования*, поскольку выгоды от более раннего поступления налогов в бюджет могут оказаться более значительными, чем прямые или кос-венные потери от введения льгот для данного проекта.

Другой взгляд на роль налогов и возможности их оптимизации можно связать с "кривой Лаффера", описывающей зависимость макроэкономических показателей (налоговых доходов бюджета, совокупных доходов бюджета) от величины налоговой нагрузки (налогового бремени, средней ставки налога). В соответствии с этой кривой (впервые изображенной А. Лаффером в 1974 г.), при возрастании налоговой нагрузки сначала происходит рост налоговых поступлений в бюджет, а затем после достижения своего максимума при некотором значении налоговой нагрузки (точки Лаффера) они начинают убывать. Концепция кривой Лаффера послужила одним из обоснований проведения налоговой реформы США в 1980-х гг., которая в дальнейшем была признана неудачной, и интерес к ней у зарубежных исследователей снизился. В то же время отечественные исследователи продолжали подробно изучать свойства кривой Лаффера, развивать связанные с ней теоретические модели, проводить оценивание по реальным данным (см., например, [2, 27, 28, 48, 49, 52, 53, 67]). Отметим, что в большинстве таких работ исследуются макроэкономические показатели и лишь немногие имеют дело с микроуровнем (отдельными предприятиями и/или видами налогов).

Что касается оптимизации механизмов стимулирования инвестиционной активности (в том числе, инвестирование реализации проектов в реальном секторе), о которой идет речь в данной работе, то большинство исследований по этой тематике носит описательно-эмпирический характер. Выбор оптимального механизма при этом часто проводится либо путем сравнительного анализа нескольких вариантов (и соответствующих расчетов), либо чисто декларативно, без основательной аргументации. Значительно меньше имеется работ, в которых механизмы стимулирования реализации инвестиционных проектов рассматриваются в рамках оптимизационных или иных моделей.

В этом плане следует отметить "математическое" направление, связанное с исследованием механизмов стимулирования в общих моделях управления - активных системах ([34, 70, 88] и др.). В рамках этого направления рассматриваются теоретико-игровые модели стимулирования в социально-экономических системах, состоящих из управляющего органа ("центра") и управляемого объекта ("агента"), функционирующих в условиях неопределенности. Стимулирование в них понимается как управление предпочтениями агента и центра, при этом центр назначает такую систему стимулирования, которая побуждает агента выбрать действие, наиболее благоприятное для центра (максимизирующее его функцию полезности). Разработанные в этом направлении модели и результаты их исследования могут применяться для широкого круга прикладных задач, однако, в силу имеющихся в них ограничений и особенностей структуры (в частности, системы стимулирования) они не могут быть использованы для анализа существующих механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов (тем более в условиях ожидания инвестиций).

Большинство существующих механизмов стимулирования инвестиций можно, по крайней мере теоретически, разделить на два типа, один из которых связан с сокращением налоговой ставки (прямо или косвенно, например, через налоговые каникулы), а другой — с субсидиями со стороны государства (также прямыми или косвенными). Поиском оптимальной комбинации этих двух типов льгот ("налоги–субсидии") занималось достаточно много исследователей (см., например, работы [119, 151, 152, 164, 173]). При этом использовались различные критерии оптимальности, связанные с ценой фирмы, выплачиваемыми фирмой налогами, функцией общественного благосостояния, более ранним инвестированием (в том числе, без задержки) и т.п.

В рамках модельных исследований отдельных механизмов стимулирования наибольшее развитие получили модели оптимизации амортизационной политики фирм. При разных предположениях относительно денежных потоков, систем налогообложения и методов амортизации выбор наиболее предпочтительной политики амортизации (с точки зрения минимизации приведенных налоговых выплат фирмы) изучался, например, в [108, 109, 110, 155, 172, 171]. Значительное внимание уделялось также моделям оценивания и реализации проектов в рамках схемы государственно-частного партнерства. Здесь, в основном, рассматривались крупные инфраструктурные проекты (строительство автомобильных и железных дорог, аэропортов и т.п.) и исследовались различные варианты участия государства в их реализации (концессионные соглашения, гарантии, распределение рисков, софинансирование и др.). В качестве критерия отбора наилучшего варианта, как правило, использовалась ожидаемая чистая приведенная прибыль (NPV) от реализованного проекта ([31, 94, 106, 113, 131, 148] и др.). Вопросы использования теоретико-игровых методов при моделировании государственно-частного партнерства рассматривались в [86].

Таким образом, критерии, используемые в существующей литературе для сравнения различных вариантов того или иного механизма стимулирования и выбора из них наилучшего, с одной стороны, достаточно разнообразны (для различных механизмов), а с другой стороны, подавляющее большинство из них так или иначе связаны с интегральной приведенной прибылью от реализованного проекта, отражая тем самым интересы и предпочтения инвестора.

Цель и основные задачи исследования. Цель данной работы — разработать единый теоретический подход к исследованию потенциальных возможностей различных механизмов стимулирования (налоговых и неналоговых) реализации инвестиционных проектов в реальном секторе в условиях неопределенности. Особое внимание уделяется проблеме согласования интересов инвестора и государства. Предложенный подход позволяет рассмотреть эффекты, связанные с ожиданием (задержкой) и оптимальным выбором момента инвестирования проектов.

В соответствии с этой целью ставились и решались следующие задачи.

- Построить (в качестве основы для единого подхода к исследованию реализации инвестиционных проектов) общую модель инвестирования проектов с учетом возможности ожидания финансирования, неопределенного характера денежных потоков, российской системы налогообложения и механизмов стимулирования.

- Сформулировать задачу стимулирования реализации инвестиционного проекта с учетом интересов как инвестора, так и государства (на федеральном и/или региональном уровне).

- Исследовать механизмы налоговых каникул (по налогу на прибыль) и амортизации как инструменты стимулирования реализации инвестиционных проектов в условиях ожидания инвестиций. Оценить потенциальные возможности этих механизмов с точки зрения оптимизации, согласования интересов инвестора и государства. Провести сравнение эффективности различных типов налоговых каникул, используемых в российской практике. Выявить эффекты, возникающие при совместном использовании амортизации и налоговых каникул.

- Исследовать различные механизмы неналогового стимулирования реализации инвестиционных проектов. В качестве таких механизмов рассмотреть следующие:
  - совместное финансирование проектов (государством и частным инвестором) в рамках государственно-частного партнерства;
  - концессионное соглашение (типа "build–operate–transfer");
  - бюджетные субсидии на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционного проекта;
  - государственные гарантии по кредитам, привлекаемым на осуществление рискованных инвестиционных проектов.

- Провести в рамках предложенного подхода сравнительный анализ результатов реализации инвестиционных проектов (с учетом ожиданий финансирования) для различных режимов налогообложения российских предприятий в реальном секторе:
  - до и после реформы налогообложения прибыли предприятий 2002 года;
  - существующих на территориях опережающего социально-экономического развития и в особых экономических зонах;
  - традиционного налога на имущество и "гипотетического" налога на недвижимость.

- Развить математический инструментарий для анализа механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов с учетом ожидания инвестиций.

Объектом исследования являются процессы реализации инвестиционных проектов в реальном секторе (в том числе создание производственных предприятий) в условиях неопределенности.

Предмет исследования в данной работе — механизмы стимулирования реализации проектов в условиях неопределенности, возможного ожидания инвестирования и системы налогообложения.

Область исследования соответствует требованиям паспорта специальности ВАК 5.2.2. «Математические, статистические и инструментальные методы в экономике», представленным в пункте 4 – "Разработка и развитие математических и компьютерных моделей и инструментов анализа и оптимизации процессов принятия решений в экономических системах".

Методы, использованные в данном исследовании, относятся к таким областям как оценивание инвестиционных проектов в условиях неопределенности, теория реальных опционов, теоретико-игровые модели равновесия, оптимальная остановка случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения.

Для моделирования эффектов, связанных с задержкой финансирования инвестиционных проектов в условиях неопределенности (инвестиционных ожиданий), наиболее адекватным представляется использование теории реальных опционов (real options). Это направление стало активно развиваться с середины 1980-х годов, хотя сам термин "real option" был введен С. Майерсом еще в 1977 году.

Согласно общему определению, реальный опцион — это право, но не обязанность, принимать в условиях неопределенности гибкие решения, связанные с различными видами деловой активности, например, отсрочкой, отказом, расширением или заключением контракта на проект. Применительно к анализу инвестиционных проектов использование реальных опционов предоставляет возможность адаптировать принимаемые инвестиционные решения к меняющейся (неопределенным образом) внешней среде, в частности, откладывать решение об инвестировании проекта при неблагоприятной для этого ситуации.

Концепция реальных опционов нашла свое отражение во многих монографиях и учебных пособиях (например, M. Amram, N. Kulatilaka [97], T. Copeland, V. Antikarov [116], A. Dixit, R. Pindyck [121], L. Trigeorgis [165], А. Дамодаран [50], П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк [40], М.А. Лимитовский [63]), а их применение затронуло практически все отрасли экономики и направления экономической науки (отметим, в частности, работы [112, 143, 132, 138, 166, 167, 29, 35, 36, 58, 59, 60, 85] и обширную библиографию в них).

Существуют различные классификации реальных опционов (по действию, виду неопределенности, области применения и т.п.). Для проектов в реальном секторе наиболее существенными являются следующие виды реальных опционов:

1) опцион откладывания (ожидания) — откладывание начала реализации проекта до наступления более благоприятного момента времени;

2) опцион развития (продолжения, роста) — изменение производства, внедрение новой технологии и т.п., когда проект уже реализуется;

3) опцион завершения (закрытия, выхода) — отказ от продолжения проекта, когда он уже становится неэффективным.

Реализация инвестиционных проектов часто бывает связана с последовательным использованием всех трех упомянутых опционов. Однако соответствующая модель представляется достаточно сложной для анализа, тем более, когда речь идет об исследовании различных качественных взаимосвязей. В данной работе рассматривается только опцион первого типа, связанный с выбором момента инвестирования (начала реализации) проекта. Соответствующие модели с его использованием будут далее иногда называться моделями инвестиционных ожиданий, или ожидания инвестиций.

Неопределенность, возникающая в денежных потоках при реализации проекта, рассматривается в рамках теории случайных процессов. При выборе момента начала реализации проекта в моделях инвестиционных ожиданий используется теория оптимальной остановки случайных процессов. Возникновение этой теории во многом было стимулировано работами А. Вальда по статистическому последовательному анализу (1940-е гг.), а ее современное состояние сформировалось на основе трудов А.Н. Колмогорова, Е.Б. Дынкина, А.Н. Ширяева, А.А. Новикова, Б.И. Григелиониса, Н.В. Крылова, Б. Оксендаля, G. Peskir, P. Salminen, D. Lamberton, M. Zervos, L.H.R. Alvarez, S. Dayanik, I. Karatzas, M. Beibel, H.R. Lerche, E. Mordecki и др. Оптимальные моменты остановки могут, вообще говоря, иметь довольно сложную структуру, что зачастую затрудняет интерпретацию принимаемого решения об остановке и его использование при дальнейшем исследовании модели. Однако во многих экономических моделях, связанных с использованием теории оптимальной остановки случайных процессов, возникают более простые "пороговые" моменты остановки, определяемые первым моментом времени, когда рассматриваемый случайный процесс (или некоторая функция от него) превзойдет некоторый уровень (порог). Пороговые моменты остановки как самостоятельный объект систематически стали изучаться сравнительно недавно, среди исследований по общим условиям оптимальности таких моментов можно отметить, например, работы [4, 69, 168, 117, 133]. Моменты остановки именно такого (порогового) типа как раз и возникают в исследуемых в данной работе моделях инвестиционных ожиданий в качестве оптимального времени начала реализации проекта.

Для исследования потенциальных возможностей механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов автор использует подход многоуровневой оптимизации, предполагающий иерархию среди участников проекта (государства и инвестора), заинтересованных в его реализации. При этом решение участника верхнего уровня (государства) выбирается как оптимальный ответ на всевозможные оптимальные решения участника нижнего уровня (инвестора). Такой подход можно рассматривать в рамках теории иерархических игр, существенный вклад в развитие которой внесли отечественные исследователи (в частности, Ю.Б. Гермейер, Н.С. Кукушкин, Д.А. Новиков и др.), как игру "центр–агент", где "центром" является государство, а "агентом" — частный инвестор.

Еще одной особенностью данного исследования является преимущественное использование метода аналитического моделирования, в рамках которого описание моделей и результатов их исследования представляется в аналитическом (формульном) виде. В отличие от других подходов математического моделирования (имитационного, численного, статистического) он, с одной стороны, не требует сколько-нибудь значительных затрат вычислительных и информационных ресурсов, а с другой стороны, позволяет получать в общем виде зависимости результатов исследования от исходных параметров рассматриваемой системы, оценивать характер влияния параметров на различные показатели, выявлять общие закономерности в поведении системы. Использование именно аналитического подхода во многом связано с тем, что базовая модель инвестиционных ожиданий содержит большое число различных параметров, причем влияние некоторых из них на результаты реализации инвестиционных проектов носит совсем не монотонный (а иногда и "контринтуитивный") характер. При этом упор делается на моделирование в непрерывном времени, что позволяет (в отличие от дискретного случая) получать решения в аналитическом виде, пригодном для исследования различных зависимостей от параметров модели.

Научная новизна. В настоящем исследовании предлагается новый подход к выбору оптимальных параметров различных механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов в реальном секторе. Этот подход, единый для различных механизмов стимулирования, позволяет при реализации инвестиционных проектов:

(а) учесть интересы как инвестора, так и государства;

(б) учесть возможное ожидание финансирования проекта и связанные с этим эффекты;

(в) оценить потенциальные возможности и различные эффекты стимулирующих механизмов.

Основными новыми результатами, полученными в данной диссертации, являются следующие.

1. Разработан единый теоретический подход к исследованию и оптимизации различных механизмов стимулирования (налоговых и неналоговых) реализации инвестиционных проектов в реальном секторе в условиях неопределенности. В основе этого подхода лежит построенная автором общая схема описания и исследования инвестиционных проектов в условиях неопределенности, учитывающая интересы как инвестора, так и государства, а также возможность отложить начало реализации проекта в зависимости от текущей экономической ситуации.

2. Для различных механизмов налогового и неналогового стимулирования реализации инвестиционного проекта доказана принципиальная возможность согласования интересов инвестора и государства. В данном случае это означает, что изменение соответствующего параметра механизма стимулирования при определенных условиях оказывается выгодным одновременно как инвестору (возрастает его ожидаемый чистый дисконтированный доход – NPV), так и государству (проект инвестируется раньше, а также возрастает ожидаемый интегральный бюджетный эффект от реализации проекта, т.е. разность между ожидаемыми приведенными налоговыми поступлениями в бюджеты (федеральный и региональный) и затратами государства на реализацию проекта).

3. Для модели инвестирования с учетом ожиданий и детерминированных налоговых каникул, получены явные формулы для оптимального момента инвестирования, оптимальных ожидаемых NPV инвестора и приведенных налоговых поступлений в бюджеты (федеральный и региональный). Выведены условия, при которых зависимость указанных показателей от длительности налоговых каникул оказывается немонотонной, а увеличение налоговых каникул может не приводить к более раннему инвестированию.

4. Получены условия существования и явные формулы для оптимальных налоговых каникул, обеспечивающих максимальный бюджетный эффект. Найдены три области в пространстве параметров прибыли с разными типами зависимости ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет от дли-

тельности налоговых каникул. В одной области увеличение длительности налоговых каникул выгодно инвестору и невыгодно государству (рассогласование интересов); в другой — рост длительности каникул всегда выгоден как инвестору, так и государству (полное согласование интересов); в третьей — возрастание длительности каникул до оптимального значения выгодно и инвестору, и государству, а свыше этого значения невыгодно государству (условное согласование интересов).

5. Введено понятие модифицированного срока окупаемости, по окончании которого отношение ожидаемой дисконтированной накопленной прибыли к объему начальных инвестиций становится равным заданному "нормативу окупаемости". Выведена формула для оптимального норматива окупаемости, при котором налоговые поступления от реализации проекта в бюджет будут максимальными.

6. Проведено сравнение эффективности налоговых каникул (для ожидаемых NPV инвестора и поступлений в бюджеты разных уровней) детерминированной длительности и основанных на разных сроках окупаемости, для случаев полного или частичного освобождения от федеральной и/или региональной части налога на прибыль.

7. Найдена явная формула для оптимальной амортизационной политики, обеспечивающей максимальные ожидаемые приведенные налоговые поступления от реализованного проекта в бюджет.

8. Показано, что совместное использование амортизации и налоговых каникул может приводить к парадоксальным эффектам, когда отдельные механизмы "мешают" друг другу, вызывая в ряде случаев контринтуитивное понижение инвестиционной активности.

Установлено, что существуют три диапазона длительности налоговых каникул, для каждого из которых зависимость оптимального момента инвестирования от нормы амортизации будет существенно разной.

9. Описаны три области (в пространстве параметров инвестиционного проекта) с разным типом зависимости ожидаемых приведенных налоговых поступ-

лений в бюджет от нормы амортизации — области рассогласования интересов инвестора и государства, полное согласование и условного согласования интересов (аналогичные соответствующим областям для налоговых каникул).

10. Показано, что рост неопределенности может ограничивать возможности амортизационной политики как средства согласования интересов инвестора и государства, а уменьшение неопределенности может расширить возможности согласования интересов по привлечению инвестиций.

11. Для инвестиционных проектов, реализуемых в рамках государственно-частного партнерства, предложен оптимизационный подход к выбору степени участия государства в совместном финансировании проектов, а также к определению концессионной платы в модели концессионного проекта, направленного на создание, эксплуатацию и дальнейшую передачу государству нового производственного объекта. Выведены формулы для оптимальной доли софинансирования и оптимальной величины концессионной платы. Показано, что увеличение налоговой нагрузки (в определенных пределах) в сочетании с использованием оптимальной концессионной платы может ускорить инвестирование проекта.

12. Для механизма бюджетных субсидий на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционных проектов, выведена формула, описывающая в явной форме зависимость оптимальной (по критерию интегрального бюджетного эффекта) величины субсидируемого процента от параметров проекта, налоговой нагрузки, условий кредитования. Показано, что использование оптимальных субсидий может стимулировать более раннее инвестирование проекта при увеличении налоговой нагрузки.

13. Построена и исследована модель механизма государственных гарантий по кредиту для привлечения инвестиций на рискованные инвестиционные проекты, которые могут с некоторой вероятностью потерпеть неудачу после финансирования.

Доказано, что при достаточно общих предположениях на модель существуют оптимальные решения участников (инвестора, кредитной организации и государства) — момент инвестирования проекта, процент по кредиту, доля возвращаемого по гарантии кредита. Для случае, когда прибыль от проекта моделируется геометрическим броуновским движением, эти решения описываются явными формулами.

Показано, что при малых рисках (вероятности неудачи проекта) государству выгодно предоставлять максимально допустимые гарантии по возврату кредита. Установлено также, что относительная эффективность "оптимального" механизма гарантий по кредитам (по сравнению с отсутствием гарантий) увеличивается с ростом величины риска.

14. В рамках разработанного подхода проведен сравнительный анализ (на модельном уровне) результатов реализации инвестиционных проектов (с учетом ожиданий финансирования) для различных режимов налогообложения российских предприятий в реальном секторе: до и после реформы 2002 года налогообложения прибыли, а также существующих на территориях РФ с особым режимом организации производства и управления — территориях опережающего социально-экономического развития и в особых экономических зонах технико-внедренческого и промышленно-производственного типа.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработан единый подход (на модельном уровне) к исследованию потенциальных возможностей различных налоговых и неналоговых механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов в реальном секторе секторе и влияния на нее различных факторов экономической среды (в том числе, неопределенности и налоговой нагрузки).

Доказана принципиальная возможность согласования интересов инвестора и государства для стимулирования инвестиций с помощью существующих налоговых и неналоговых механизмов.

Показано, что одновременное использование нескольких механизмов стимулирования может приводить к парадоксальным эффектам, вызывая понижение инвестиционной активности. Установлено, что при возрастании налоговой нагрузки оптимизация механизмов стимулирования может ускорить реализацию инвестиционных проектов.

Разработанные в работе модели могут быть полезными при совершенствовании механизмов стимулирования инвестиционной активности, оценивании и сравнении различных новаций, связанных с налоговым и неналоговым стимулированием реализации инвестиционных проектов в реальном секторе.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Предложенная автором модель выбора момента инвестирования проектов в реальном секторе может использоваться для исследования процессов реализации инвестиционных проектов в условиях неопределенности и ожидания инвестиций.

2. Разработанный подход, основанный на учете интересов как государства, так и инвестора, позволяет единым образом подойти к оптимизации параметров различных механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов.

3. Предложенная общая схема исследования реализации инвестиционных проектов в условиях неопределенности, ожидания инвестиций и государственной поддержки может применяться для механизмов стимулирования, существующих в российской практике:

- налоговых каникул по налогу на прибыль предприятий;
- ускоренной амортизации;
- совместного финансирования проектов в условиях государственно-частного партнерства;
- концессионных соглашений;
- бюджетных субсидий на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционного проекта;
- государственных гарантий по кредитам для привлечения инвестиций на рискованные проекты.

4. Существует принципиальная возможность согласования интересов инвестора и государства с помощью перечисленных выше налоговых и неналоговых механизмов стимулирования.

5. Одновременное использование механизмов ускоренной амортизации и налоговых каникул может приводить к парадоксальным эффектам, вызывая более позднее инвестирование проектов при увеличении длительности налоговых каникул или нормы амортизации.

6. Рост неопределенности уменьшает возможности механизмов стимулирования как инструмента согласования интересов инвестора и государства и ведет к более позднему инвестированию проектов.

7. Зависимость оптимального момента инвестирования проекта от величины налоговой нагрузки может быть немонотонной для неналоговых механизмов государственной поддержки (софинансирование проектов, концессии, субсидии на уплату процентов по кредитам). При определенных условиях использование оптимальных параметров указанных механизмов может приводить к более раннему инвестированию при увеличении налоговой нагрузки.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Используемые в диссертации методы соответствуют объекту и предмету исследования. Они основаны на результатах и выводах таких разделов науки как оценивание инвестиционных проектов в условиях неопределенности, теория реальных опционов, теоретико-игровые модели равновесия, оптимальная остановка случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения. Все представленные в диссертации результаты снабжены необходимыми обоснованиями, а сформулированные математические утверждения — строгими доказательствами.

Результаты исследования представлялись на научных семинарах Отделения теоретической экономики и математических исследований ЦЭМИ РАН (2010, 2011, 2013, 2014, 2016, 2018, 2019, 2022 гг.), заседаниях Ученого Совета ЦЭМИ РАН (2006, 2011 гг.), докладывались на крупнейших научных мероприятиях, в том числе:

- Всемирном Конгрессе Эконометрического Общества (2010);

- Всемирных Конгрессах Международной экономической ассоциации (2002, 2005);
- Всемирных Конгрессах и Коллоквиумах общества Башелье по финансовой математике (2000, 2002, 2005, 2006, 2008, 2010–2013);
- Конгрессах Европейской экономической ассоциации (2005, 2012);
- Европейской конференции Эконометрического Общества (2012);
- Европейских конференциях по исследованию операций (2009, 2013);
- Международной научной конференции, посвященной 100-летию А.Н. Колмогорова "Колмогоров и современная наука" (2003);
- Международной научной конференции "Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича" (2012);
- Международных конференциях по исследованию операций (2001, 2010, 2013, 2016, 2018), теории игр и менеджменту (2014), системному моделированию и оптимизации (2015), современным проблемам теории вероятностей и случайных процессов (2016), стохастическим методам (2017, 2020), стохастической оптимизации и оптимальной остановке (2012), современным методам финансовой математики (2013, 2015, 2018);
- Российских Экономических Конгрессах (2009, 2013, 2016);
- Всероссийских симпозиумах "Стратегическое планирование и развитие предприятий" (с 2002 г.).

Публикация результатов. Основные результаты представленного исследования были опубликованы в 43 научных работах, включая 24 работы (общим объемом 29.4 п.л., личный вклад автора — 20 п.л.) в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, определяемый ВАК РФ, 19 работ (общим объемом 37.6 п.л., личный вклад автора — 25 п.л.) в других изданиях, и многочисленных материалах научных мероприятий.

Структура работы. Диссертация состоит из Введения, семи глав, Заключения, списка литературы и Приложения.

В первой главе описана разработанная автором общая модель инвестирования проектов в условиях неопределенности, предназначенная для исследования эффектов, связанных с откладыванием реализации проектов до наступления наиболее благоприятной для этого ситуации. В последующих главах сформулирована задача стимулирования реализации инвестиционных проектов и исследованы потенциальные возможности различных механизмов стимулирования: налоговых каникул (глава 2), политики амортизации (глава 3), государственно-частного партнерства (глава 4), субсидирования выплаты процентов по кредитам (глава 5), государственных гарантий по кредитам (глава 6). В седьмой главе в рамках предложенного подхода проведен модельный анализ налоговых новаций, осуществлявшихся (или потенциально возможных) в России в начале XXI века. Основные выводы и возможные расширения данного исследования приведены в Заключении. В Приложении изложен математический инструментарий (оптимальная остановка случайных процессов), используемый для исследования представленной в диссертации модели ожидания инвестирования в условиях неопределенности.

Общий объем диссертации составляет 295 страниц. Список использованных источников насчитывает 174 наименования.

Глава 1. Базовая модель инвестирования проектов в условиях неопределенности

В данной главе описывается общая модель инвестирования проектов в условиях неопределенности (модель ожидания инвестиций, или модель инвестиционных ожиданий). Эта модель является основой для разработанного в данной работе единого подхода к исследованию различных механизмов стимулирования (налоговых и неналоговых) реализации инвестиционных проектов в реальном секторе.[1]

1.1. Основные экономические предположения

Основным объектом исследования в данной работе будет инвестиционный проект в реальном секторе. Результатом инвестирования и дальнейшей реализации проекта предполагается образование нового налогоплательщика (юридического лица), поэтому не ограничивая общности можно интерпретировать проект, как создание и дальнейшее функционирование в некотором регионе нового производственного предприятия, производящего определенную продукцию и потребляющего какие-то виды ресурсов.

Основными предположения, которые делаются относительно такого рода проектов и их инвестирования являются следующие.

- Денежные потоки от реализованного проекта имеют неопределенный характер в силу случайных колебаний цен на расходуемые ресурсы и выпускаемую продукцию.

- Решение об инвестировании принимается исключительно по экономическим показателям, связанным с проектом, на основе текущей информации

---

[1] Результаты главы опубликованы в работах [7, 21, 22, 24, 25, 100] с соавторами.

о рыночных ценах на затрачиваемые ресурсы и выпускаемую продукцию (отсутствие "неэкономических" факторов).

- В каждый момент времени инвестор имеет возможность либо сделать вложения в проект и начать его реализацию, либо отложить решение об инвестировании до наступления более благоприятного момента ("свобода выбора").
- Реализация проекта не меняет рыночные цены (ограничение "масштабности" проекта).
- Проект может (с какой-то вероятностью) остаться нереализованным.
- Сделанные инвестиции являются необратимыми, т.е уже не могут быть изъяты из проекта и использованы для других целей.

Реализация проекта после инвестирования будет происходить в рамках российской системы налогообложения предприятий. Более подробно денежные потоки, возникающие в ходе реализации проекта (функционирования предприятия) и рассматриваемые налоги описаны ниже.

1.2. Структура денежных потоков. Основные налоги

Предположим, что проект становится доступным для инвестирования в момент времени 0, а само инвестирование осуществляется в момент времени τ.

Представленная модель будет рассматриваться в непрерывном времени, поэтому все описанные выше компоненты денежных потоков имеют "потоковый" характер, т.е. величин на малом (единичном) промежутке времени. Такого типа потоковые величины мы будем обозначать строчными буквами.

Для целей аналитического моделирования будем предполагать срок жизни реализуемого проекта (период функционирования предприятия) бесконечным, хотя в главе 4 будут рассматриваться и проекты с конечным сроком жизни.

Введем следующие обозначения для денежных потоков, связанных с деятельностью предприятия[2] в момент $t \geq \tau$:

x_t^τ — доход, полученный предприятием (без учета НДС);

$c_t^\tau = y_t^\tau + s_t^\tau + d_t^\tau + m_t^\tau$ — расходы, связанные с производством и реализацией продукции, где

y_t^τ — материальные расходы (стоимость сырья и материалов, и т.п. без учета НДС),

s_t^τ — расходы на оплату труда (фонд оплаты труда),

a_t^τ — амортизационные отчисления,

$m_t^\tau = p_t^\tau + r_t^\tau$ — прочие расходы, к которым мы здесь относим налог на имущество предприятия p_t^τ и отчисления в социальные фонды (страховые взносы) r_t^τ.

Общая структура российской налоговой и бюджетной системы предполагает наличие бюджетов двух уровней: федерального и регионального (под которым здесь и далее будет пониматься консолидированный бюджет субъекта РФ вместе с местным бюджетом). При распределении налогов между бюджетами разных уровней мы руководствуемся главами 7 и 8 Бюджетного Кодекса (БК) РФ.

Основные налоги, рассматриваемые в данной работе, таковы.

Налог на прибыль организаций по ставке $\gamma_{\text{пр}}$, складывающейся из ставок в федеральный бюджет $\gamma_{\text{пр}}^f$ и региональный бюджет $\gamma_{\text{пр}}^r$.

Налог на добавленную стоимость (НДС) со ставкой $\gamma_{\text{НДС}}$. Согласно БК этот налог полностью идет в федеральный бюджет.

Налог на имущество организаций со ставкой $\gamma_{\text{им}}$, полностью зачисляемый в региональный бюджет.

Страховые взносы (бывший единый социальный налог) — отчисления с фонда оплаты труда по ставке $\gamma_{\text{соц}}$. Хотя страховые взносы идут не в бюджеты, а во внебюджетные фонды, мы рассматривать их вместе с налогами как часть "расширенного бюджета" (или "бюджета расширенного правительства"), поскольку они формируют "общий доход" государства. Мы будем условно рас-

---

[2] Рассматриваемые потоки предполагаются дефлированными (к уровню нулевого момента времени).

щеплять их на федеральную (по ставке $\gamma^f_{\text{соц}}$) и региональную (по ставке $\gamma^r_{\text{соц}}$) части, которые, например, могут соответствуют поступлениям в федеральные и территориальные фонды. Естественно, $\gamma^f_{\text{соц}} + \gamma^r_{\text{соц}} \le \gamma_{\text{соц}}$, но равенство может и не выполняться. Это соответствует ситуации, когда не все страховые взносы учитываются в бюджетах разных уровней, или не учитываются совсем (при этом ставки $\gamma^f_{\text{соц}}$ и/или $\gamma^r_{\text{соц}}$ становятся нулевыми).

Налог на доходы физических лиц (НДФЛ) по ставке $\gamma_{\text{фл}}$, идущий в региональный бюджет. Хотя НДФЛ платит не предприятие, а физические лица, этот налог, взимаемый с работников предприятия (фактически с фонда оплаты труда) также связан с деятельностью предприятия.

Отметим, что рассматриваемый набор налогов характерен для многих предприятий реального сектора экономики. Здесь, однако, отсутствуют налог на добычу полезных ископаемых (возникающий в добывающих отраслях), акцизы (связанные с узкой группой товаров – алкоголем, табаком, топливом, легковыми автомобилями) и некоторые другие налоги, не составляющие значительной доли в бюджете (земельный, транспортный, водный и др.).

В качестве налоговой базы при подсчете налога на прибыль мы будем рассматривать

$$z^\tau_t = x^\tau_t - c^\tau_t = \pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t, \tag{1.1}$$

где $\pi^\tau_t = x^\tau_t - y^\tau_t$ есть величина добавленной стоимости[3]. Отметим, что представленная формула не совсем точна и расходится с определением налоговой базы из НК РФ в случае убытков, т.е. превышения расходов над доходами (в этом случае налоговая база считается нулевой). Подробнее к проблеме исчисления налоговой базы при наличии убытков мы вернемся в разделе 1.7 этой главы.

Суммарные налоги, которые идут от реализуемого проекта в момент t, равны

$$\gamma_{\text{НДС}}\pi^\tau_t + \gamma_{\text{пр}}(\pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t) + p^\tau_t + \gamma_{\text{соц}}s^\tau_t.$$

При этом в федеральный бюджет поступает

$$\gamma_{\text{НДС}}\pi^\tau_t + \gamma^f_{\text{пр}}(\pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t) + \gamma^f_{\text{соц}}s^\tau_t, \tag{1.2}$$

---

[3] Иногда под добавленной стоимостью понимают разность доходов и материальных расходов с учетом НДС.

а в региональный —

$$\gamma^r_{\text{пр}}(\pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t) + p^\tau_t + (\gamma^r_{\text{соц}} + \gamma_{\text{фл}})s^\tau_t. \tag{1.3}$$

После уплаты налогов чистый денежный поток от проекта в момент t равен

$$x^\tau_t - y^\tau_t - s^\tau_t - m^\tau_t - \gamma_{\text{пр}}(x^\tau_t - c^\tau_t) = (1 - \gamma_{\text{пр}})(\pi^\tau_t - s^\tau_t - m^\tau_t) + \gamma_{\text{пр}} a^\tau_t. \tag{1.4}$$

1.3. Оценка фондов, амортизация, налог на имущество

Основой для начисления амортизации и связанных с ней налогов в нашей модели будет балансовая стоимость основных фондов. Будем обозначать через I^τ_t балансовую стоимость основных фондов в момент времени t для предприятия, созданного в момент τ. Здесь индекс τ подчеркивает, что стоимость фондов (а она, как правило, близка к стоимости необходимых инвестиций) зависит от момента инвестирования. Зависимость I^τ_t от текущего времени t означает, что первоначальная стоимость фондов после инвестирования может переоцениваться (например, по восстановительной стоимости) для приведения в соответствие с текущими экономическими условиями. Выделим два крайних случая, которые будут представлять для нас основной интерес: случай $I^\tau_t = I_\tau$ соответствует отсутствию переоценки фондов (после момента инвестирования), а $I^\tau_t = I_t$ означает "непрерывную" переоценку (фонды постоянно переоцениваются по текущим рыночным ценам).

Согласно НК РФ (ст. 258) все амортизируемое имущество разбивается на 10 групп в зависимости от срока полезного использования (от 1 года до 30 и выше лет). В рамках нашей модели мы будем разделять основные фонды на две агрегированные части. Одна из них, которую будем называть "активной", связана с машинами, механизмами, оборудованием и т.п. Ее доля в балансовой стоимости основных фондов будет обозначаться через ψ, $0 \le \psi \le 1$). К другой ("неактивной") части отнесем здания и сооружения, срок полезного действия которых достаточно велик (по сравнению с первой частью).

Амортизационные отчисления в момент времени t для проекта, инвестированного в момент τ, будем представлять в виде

$$a_t^\tau = I_t^\tau[\psi d_{t-\tau}^a + (1-\psi) d_{t-\tau}^n], \quad t \geq \tau \tag{1.5}$$

где I_t^τ есть балансовая стоимость всех основных фондов, ψ – доля их активной части, $(d_t^a,\ t \geq 0)$, $(d_t^n,\ t \geq 0)$ – "плотности" ставки амортизации активной и неактивной части фондов (соответственно), обладающие свойством:

$$d_t^a, d_t^n \geq 0, \quad \int\limits_0^\infty d_t^a\,dt = \int\limits_0^\infty d_t^n\,dt = 1.$$

Описанное представление амортизационных отчислений с помощью "плотности ставки" охватывает различные методы начисления амортизации (точнее, их варианты для непрерывного времени), разрешенные современным налоговым законодательством. Таких методов, согласно НК РФ, осталось всего два.[4]

При *линейном методе* (ЛМ) амортизация начисляется равными долями в течение всего срока полезного действия фонда. Ему соответствует плотность

$$d_t = \begin{cases} \lambda, \text{ при } 0 \leq t \leq L \\ 0, \text{ при } t > L, \end{cases} \tag{1.6}$$

где L есть срок полезного действия фонда, а $\lambda = 1/L$.

Согласно *нелинейному методу* (НЛМ) начисленная амортизация в каждый момент времени получается как произведение фиксированной нормы на остаточную стоимость фонда. Нетрудно показать, что этому методу соответствует экспоненциальная плотность

$$d_t = \eta e^{-\eta t}, \tag{1.7}$$

где $\eta > 0$ — некоторый заданный норматив.

Поскольку налогоплательщик вправе выбирать один из двух методов начисления амортизации (ЛМ или НЛМ)[5], существуют определенные соотноше-

---

[4] Отметим, что начисление амортизации для целей бухгалтерского учета происходит несколько иначе, чем для налоговых целей, и там существуют 4 способа ее начисления. Но в данной работе мы используем амортизацию только для целей налогового учета.

[5] Для амортизируемого имущества, срок полезного использования которого составляет свыше 20 лет (8–10 группы по классификации НК), для налогового учета разрешен только линейный метод амортизации (ст. 259 НК РФ)

ния между нормами амортизации этих методов. Так, в ст. 259.2 НК РФ установлены нормы амортизации по НЛМ для различных групп. В таблице 1.1 для существующих амортизационных групп представлены нормы амортизации для линейного (по среднему сроку полезного использования в группах 1–9, а в десятой базовым брался срок в 50 лет) и нелинейного методов (в годовом исчислении). Нетрудно заметить, что для активных фондов (группы 1–7) норма по НЛМ превышает соответствующую норму по ЛМ примерно в 2.7 раза.

Таблица 1.1. Нормы амортизации для различных групп

Группа (срок, *лет*)	λ (лин. метод)	η (нелин. метод)
1 (1–2)	0.67	1.72
2 (2–3)	0.40	1.06
3 (3–5)	0.25	0.67
4 (5–7)	0.17	0.46
5 (7–10)	0.12	0.32
6 (10–15)	0.08	0.22
7 (15–20)	0.06	0.16
8 (20–25)	0.04	0.12
9 (25–30)	0.04	0.10
10 (свыше 30)	0.02	0.08

Амортизационные отчисления влияют на налоговые базы по двум налогам: налогу на прибыль (см. (1.1)) и налогу на имущество, который рассмотрим сейчас более подробно. Поскольку налоговой базой здесь является остаточная стоимость основных фондов (которые отождествляются со всем имуществом), то в рамках модели *налог на имущество* можно представить в виде

$$p_t^\tau = \gamma_{\text{им}} I_t^\tau [1 - \psi \widehat{d}^a_{t-\tau} - (1-\psi)\widehat{d}^n_{t-\tau}], \quad t \geq \tau \tag{1.8}$$

где

$$\widehat{d}^a_t = \int\limits_0^t d^a_s\,ds, \quad \widehat{d}^n_t = \int\limits_0^t d^n_s\,ds \tag{1.9}$$

обозначают накопленные доли амортизации (в балансовой стоимости), соответственно, активной и неактивной части основных фондов за период t после инвестирования.

1.4. Учет неопределенности

Пусть инвестирование проекта осуществляется в момент τ, а I_τ есть объем необходимых инвестиций (без учета НДС).

Реализация инвестиционного проекта происходит в условиях неопределенности, поскольку экономическая среда может быть подвержена влиянию различных случайных факторов (неопределенность рыночных цен, спроса и т.д.). Как уже отмечалось во Введении, существует несколько различных подходов к описанию неопределенности. В данной работе мы используем вероятностный подход для описания неопределенных величин, т.е. считаем, что такие величины представляют собой реализацию некоторых случайных процессов.

Говоря более формально, мы считаем, что стоимость необходимых инвестиций $(I_t,\ t \geq 0)$ является случайным процессом, а добавленные стоимости $(\pi_t^\tau,\ t \geq \tau,\ \tau \geq 0)$ – семейством случайных процессов, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$. Как обычно, $\mathcal{F}_t$ может интерпретироваться как наблюдаемая информация о системе до момента времени t, а I_t и π_t^τ предполагаются $\mathcal{F}_t$-измеримыми.

Для простоты будем считать, что проект начинает приносить доход сразу после инвестирования[6]. Тогда в соответствии с (1.4) ожидаемые (средние) чистые доходы инвестора после уплаты всех налогов, приведенные к моменту инвестирования, можно описать формулой

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^\infty [(1-\gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - s_t^\tau - m_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}} a_t^\tau] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right), \tag{1.10}$$

где ρ есть ставка дисконтирования, а $\mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_\tau)$ — условное математическое ожидание при известной информации до момента τ.

Одновременно с доходами инвестора можно подсчитать (по формулам (1.2) и (1.3)), какие налоги в бюджет сможет принести предприятие после инвестирования — ожидаемый бюджетный эффект. Ожидаемые налоговые поступления от предприятия в *федеральный бюджет*, приведенные к моменту

---

[6] Модель с учетом лага между моментом инвестирования и началом функционирования предприятия будет обсуждаться в этой главе ниже (раздел 1.8).

инвестирования τ, будут равны

$$T^f_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^\infty [\gamma_{\text{НДС}}\pi^\tau_t + \gamma^f_{\text{пр}}(\pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t) + \gamma^f_{\text{соц}}s^\tau_t]e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\middle|\; \mathcal{F}_\tau\right), \quad (1.11)$$

а в *региональный бюджет* –

$$T^r_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^\infty [\gamma^r_{\text{пр}}(\pi^\tau_t - s^\tau_t - a^\tau_t - m^\tau_t) + p^\tau_t + (\gamma^r_{\text{соц}} + \gamma_{\text{фл}})s^\tau_t]e^{-\rho(t-\tau)}dt \;\middle|\; \mathcal{F}_\tau\right). \quad (1.12)$$

Замечание. В данной главе ставки дисконтирования в формулах для подсчета ожидаемой прибыли инвестора от реализованного проекта (1.10) и ожидаемых налоговых поступлений в бюджеты (1.11) и (1.12) полагаются одинаковыми. Однако, такое предположение не является принципиальным, а сделано в данной главе только для некоторого упрощения формул. В главах 5 и 6 далее рассматривается ситуация с разными ставками дисконта для показателей прибыли инвестора и бюджетного эффекта.

1.5. Задача инвестора: выбор момента инвестирования

В рассматриваемой модели стратегия (поведение) инвестора характеризуется моментом времени, когда проект финансируется и начинает реализовываться. Поведение инвестора предполагается рациональным в том смысле, что, располагая в каждый момент времени информацией о сложившихся рыночных ценах, связанных с данным инвестиционным проектом, он может либо принять решение об инвестировании, либо отложить его до наступления более благоприятной для него ситуации. При принятии решения инвестор учитывает только экономические факторы и ориентируется на такой показатель эффективности инвестиционного проекта как ожидаемый чистый дисконтированный доход (NPV) от реализованного проекта. Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе указанной выше информации выбрать такой момент инвестирования τ, для которого ожидаемый чистый доход от проекта, приведенный к нулевому (базовому) моменту времени (NPV), будет максимальным, т.е.

$$\mathbf{E}\,(V_\tau - I_\tau)\,e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_{\tau}, \tag{1.13}$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ – наблюдаемой информации о системе) моментам τ,[7] а $\chi_{\{\tau<\infty\}}$ есть индикаторная функция, равная 1 при конечном моменте инвестирования τ и 0 в противном случае (т.е. отсутствии инвестирования на бесконечном интервале времени).

1.6. Решение задачи инвестора

В этом разделе мы приведем решение задачи инвестора, которое при сделанных ниже предположениях можно получить в явном (аналитическом) виде. На основе выведенных формул в дальнейшем будет производиться теоретическое исследование, а также ряд численных расчетов.

1.6.1. Математические предположения

Инвестиции. Объем необходимых инвестиций I_t (в момент t) описывается процессом геометрического броуновского движения

$$I_t = I + \int\limits_0^t I_s(\alpha_I ds + \sigma_I dw_s^I), \quad t \geq 0, \tag{1.14}$$

где $(w_t^I,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс, α_I и σ_I — вещественные числа $(\sigma_I \geq 0)$, I — заданное начальное состояние.

Добавленная стоимость. В работе будут использоваться два типа предположений относительно динамики величин *добавленной стоимости*, связанные с различным учетом ее явной зависимости от момента инвестирования проекта.

Первый тип. Поток добавленной стоимости от реализованного проекта $(\pi_t^\tau,\ t \geq \tau)$ не зависит от момента инвестирования τ, например, определяется

---

[7] Допускается, что τ могут принимать и бесконечное значение с положительной вероятностью.

системой рыночных (внешних) цен, не меняющейся после реализации инвестиционного проекта. В этом случае

$$\pi_t^\tau = \pi_t, \quad t \geq \tau \tag{1.15}$$

для некоторого процесса $(\pi_t,\ t \geq 0)$, относительно которого делается стандартное предположение о геометрическом броуновском движении:

$$\pi_t = \pi_0 + \int\limits_0^t \pi_s(\alpha_\pi\, ds + \sigma_\pi\, dw_s^\pi), \quad t \geq 0, \tag{1.16}$$

где $(w_t^\pi,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс, α_π и σ_π — вещественные числа $(\sigma_\pi \geq 0)$, а π_0 — заданное начальное состояние.

Второй тип предположений учитывает зависимость добавленной стоимости от момента инвестирования проекта следующим образом:

$$\pi_t^\tau = \pi_t \xi_t^\tau, \quad t \geq \tau \tag{1.17}$$

где процесс $(\pi_t,\ t \geq 0)$ удовлетворяет условию (1.16), а $(\xi_{\tau+t}^\tau,\ t \geq 0)$ является семейством неотрицательных диффузионных процессов, однородных по $\tau \geq 0$ в том смысле, что:

$$\xi_{\tau+t}^\tau = \xi_0 + \int\limits_\tau^{t+\tau} a(s-\tau, \xi_s^\tau)\, ds + \int\limits_\tau^{t+\tau} b(s-\tau, \xi_s^\tau)\, dw_s^\xi, \quad t, \tau \geq 0, \tag{1.18}$$

где функции сноса и диффузии $a(t,x)$ и $b(t,x)$, соответственно, удовлетворяют стандартным условиям, достаточным для существования решения стохастического дифференциального уравнения (1.18) (см., например, [135]), ξ_0 — заданное начальное состояние. Винеровский процесс w_t^ξ может быть коррелирован с процессом w_t^π.

Можно сказать, что процесс π_t в представлении (1.17), как и в (1.15), связан с внешними (рыночными) ценами на произведенные товары и потребляемые ресурсы (рыночная неопределенность), в то же время как процесс $\xi_{\tau+t}^\tau$ связан с внутренним источником случайных изменений добавленной стоимости уже во время функционирования предприятия ("производственная неопределенность"). Например, π_t в представлении (1.17) можно интерпретировать как добавленную стоимость, приходящуюся на единицу (или какой-то фиксированный объем) продукции, а ξ_t^τ как случайный объем (или спрос) выпуска.

С формальной точки зрения первый тип предположений можно считать частным случаем второго типа (когда в представлении (1.18) функции сноса и диффузии — нулевые), но мы все же будем различать эти два случая.

Винеровские процессы w_t^I и w_t^π будут предполагаться зависимыми с коэффициентом корреляции r, т.е. $\mathbf{E}(w_t^I w_t^\pi) = rt$ для всех $t \geq 0$.

Отметим еще, что информационное множество $\mathcal{F}_t$ порождается при первом типе предположений "историей" винеровских процессов $(w_s^I, w_s^\pi,\ s \leq t)$, а при втором типе предположений — процессами $(w_s^I, w_s^\pi, w_s^\xi,\ s \leq t)$.

Несколько замечаний о геометрическом броуновском процессе. Как видно из приведенных выше формул, в основе описания динамики неотрицательных случайных процессов добавленной стоимости и объема необходимых инвестиций лежит процесс геометрического броуновского движения. Такого типа предположения являются типичными для многих моделей финансовой математики (например, [111]), или теории реальных опционов [121, 165].[8]

Отметим, что гипотеза о геометрическом броуновском движении является следствием ряда довольно общих предположений о характере стохастического процесса (независимости относительных приращений от "истории" процесса, их однородности и непрерывности траекторий).

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ задан случайный процесс $(\Pi_t, t \geq 0)$.

Утверждение 1.1. *Если почти все траектории случайного процесса* $(\Pi_t, t \geq 0)$ *положительны и непрерывны по* t, *а его относительные приращения* $\dfrac{\Pi_{t+\Delta t} - \Pi_t}{\Pi_t}$ *при всех* t, $\Delta t > 0$ *не зависят от* $\mathcal{F}_t$ *и однородны по* t, *то* $(\Pi_t, t \geq 0)$ *является процессом геометрического броуновского движения, т.е.*

$$d\Pi_t = \Pi_t(\alpha\, dt + \sigma\, dw_t), \tag{1.19}$$

---

[8] Использование процесса броуновского движения в финансовых моделях началось еще с работы Л. Башелье (1900). Существенную роль процесса геометрического броуновского движения для описания эволюции цен в экономике впервые отмечал, по-видимому, П. Самуэльсон [158], который назвал его "экономическим броуновским движением".

или, что эквивалентно,

$$\Pi_t = \Pi_0 \exp\{(\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w_t\}, \tag{1.20}$$

где α и σ — вещественные числа ($\sigma \geq 0$), а w_t — стандартный винеровский процесс.

Доказательство. Процесс $X_t = \log \Pi_t - \log \Pi_0,\ t \geq 0$ является непрерывным однородным процессом с независимыми приращениями и начальным условием $X_0 = 0$. Поэтому, согласно известным результатам о представлении непрерывных случайных процессов (например, [43, с. 240, 34]), X_t является линейной функцией от винеровского процесса, т.е. $X_t = at + bw_t$, где a, b — некоторые числа. При этом b можно без ограничения общности считать положительным, т.к. винеровский процесс симметричен. Отсюда сразу следует представление типа (1.20), а эквивалентность соотношений (1.19) и (1.20) легко выводится из формулы Ито. ☐

Оба параметра геометрического броуновского движения α и σ имеют естественную интерпретацию, а именно:

$\alpha = \dfrac{1}{dt}\mathbf{E}\left(\dfrac{d\Pi_t}{\Pi_t}\right)$ есть среднее значение мгновенного темпа прироста процесса;

$\sigma^2 = \dfrac{1}{dt}\mathbf{D}\left(\dfrac{d\Pi_t}{\Pi_t}\right)$ — дисперсия мгновенного темпа прироста процесса (волатильность).

Волатильность процесса прибыли можно связать со стабильностью (предсказуемостью) экономической системы. Так, в условиях кризиса фактор неопределенности играет большую роль и волатильность прибыли становится большой. В то же время при стабильной экономической ситуации волатильность не очень велика.

Процесс геометрического броуновского движения можно также рассматривать как лог-линейную аппроксимацию соответствующих реальных процессов. При этом, если задан временной ряд каких-либо показателей (например, прогнозных значений прибыли реализованного проекта), то параметры соответствующего геометрического броуновского процесса можно оценить, например, с помощью метода наименьших квадратов, примененного, правда, не к самому временному ряду, а к его разностям.

Требование постоянства (во времени) параметров геометрического броуновского движения можно несколько ослабить. Так, можно рассматривать процесс $(\Pi_t, t \geq 0)$, состоящий из "кусков" геометрически-броуновских движений Π_t^i, $i = 0, \ldots, k$ (с различными параметрами роста и волатильности) на заданных интервалах $[0, l_1), [l_1, l_2), \ldots, [l_k, \infty)$. При этом отдельные куски должны быть "согласованы" между собой в моменты изменений l_i: например, "непрерывно склеены" $(\Pi_{l_i}^{i-1} = \Pi_{l_i}^i)$ или связаны функциональной зависимостью $(\Pi_{l_i}^i = F(\Pi_{l_i}^{i-1}))$. Такого типа предположения могут отражать, например, тот факт, что прибыль предприятия (связанная с добавленной стоимостью) может с течением времени замедлять свой рост и даже убывать.

Амортизация и переоценка фондов. *Доля активной части* основных фондов ψ считается фиксированной.

Относительно *механизма переоценки фондов* примем гипотезу, что прогноз балансовой стоимости основных фондов I_t^τ будет "следовать" изменению стоимости инвестиционных ресурсов I_t. А именно, будем считать, что

$$\mathbf{E}\,(I_t^\tau \mid \mathcal{F}_\tau) = I_\tau e^{\theta \alpha_I (t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tag{1.21}$$

где параметр θ характеризует механизм переоценки. При этом, $\theta = 0$ соответствует случаю отсутствия переоценки (после инвестирования), а $\theta = 1$ — "непрерывной" переоценке по текущей рыночной (восстановительной) стоимости I_t. Если представить себе, что переоценка (по текущей стоимости) происходит в случайные моменты времени, подчиняющиеся, например, пуассоновскому процессу, то параметр θ можно связать с интенсивностью этого процесса.

Оплата труда. Наиболее спорной, на наш взгляд, является гипотеза о том, что *величина фонда оплаты труда* s_t^τ меняется пропорционально добавленной стоимости π_t^τ, а именно

$$s_t^\tau = \tilde{\mu} \pi_t^\tau,$$

где $\tilde{\mu}$ — заданная величина, которую далее мы будем называть *зарплатоемкостью* проекта (долей оплаты труда в добавленной стоимости). Такое предположение согласуется, на наш взгляд, с принципом зависимости оплаты труда от результатов производственной деятельности. В какой-то мере оно носит технический характер, поскольку отказ от него приводит к необходимости рассмотрения многомерных диффузионных процессов размерности выше 2, что, в свою очередь, делает невозможным получение явных (аналитических) формул.

С учетом этого предположения налоговую базу по налогу на прибыль (1.1) можно записать как

$$\begin{aligned} x_t^\tau - c_t^\tau &= \pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - p_t^\tau - \gamma_{\text{соц}} s_t^\tau = \\ &= \pi_t^\tau (1-\mu) - a_t^\tau - p_t^\tau, \quad \text{где } \mu = (1{+}\gamma_{\text{соц}})\tilde{\mu}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Для того, чтобы эта налоговая база не была отрицательной во все моменты времени, необходимо потребовать, чтобы μ было меньше единицы, или

$$\tilde{\mu} < 1/(1+\gamma_{\text{соц}}).$$

1.6.2. Вычисление основных показателей

После сделанных предположений можно вывести явные формулы для приведенных доходов инвестора и налоговых поступлений в бюджеты.

Ради краткости будем обозначать математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_\tau$ через $\mathbf{E}_\tau$.

В приводимых ниже формулах предполагается, что τ — марковский момент, а $t \geq 0$ (если не оговорено противное).

Утверждение 1.2. *Если процесс добавленной стоимости удовлетворяет условиям (1.15)–(1.16), то*

$$\mathbf{E}_\tau \pi_{\tau+t}^\tau = \pi_\tau e^{\alpha_\pi t}. \tag{1.23}$$

Если процесс π_t^τ удовлетворяет условиям (1.17)–(1.18), то

$$\mathbf{E}_\tau \pi_{\tau+t}^\tau = \pi_\tau c_t, \quad \text{где} \ \ c_t = \mathbf{E}(\pi_t \xi_t^0)/\pi_0. \tag{1.24}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $(w_t,\ t \geq 0)$ есть винеровский процесс, а τ — марковский момент, то по теореме Дынкина–Ханта (см. [65]) процесс $\widehat{w}_t = w_{\tau+t} - w_\tau,\ t \geq 0$ является винеровским и независимым от $\mathcal{F}_\tau$.

Если выполнены условия (1.15)–(1.16), то из представления геометрического броуновского движения в виде стохастической экспоненты (1.20) следует:

$$\pi^\tau_{\tau+t} = \pi_{\tau+t} = \pi_0 \exp\{(\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma^2_\pi)(\tau + t) + \sigma_\pi w_{\tau+t}\} =$$
$$= \pi_0 \exp\{(\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma^2_\pi)\tau + \sigma_\pi w_\tau\} \cdot \exp\{(\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma^2_\pi)t + \sigma_\pi \widehat{w}_t\}.$$

Отсюда,

$$\mathbf{E}_\tau \pi^\tau_{\tau+t} = \pi_\tau \mathbf{E}_\tau \exp\{(\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma^2_\pi)t + \sigma_\pi \widehat{w}_t\} = \pi_\tau \exp\{\alpha_\pi t\}.$$

Пусть теперь выполнены условия (1.17)–(1.18). Из представления (1.18) видно, что

$$\xi^\tau_{\tau+t} = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s, \xi^\tau_{\tau+s})\, ds + \int\limits_0^t b(s, \xi^\tau_{\tau+s})\, dw^\xi_{\tau+s} =$$
$$= \xi_0 + \int\limits_0^t a(s, \xi^\tau_{\tau+s})\, ds + \int\limits_0^t b(s, \xi^\tau_{\tau+s})\, d\widehat{w}^\xi_s.$$

Отсюда вытекает, что для любого марковского момента τ распределение процесса $\xi^\tau_{\tau+t}$ совпадает (п.н.) с распределением единственного (в строгом смысле) решения стохастического уравнения

$$\tilde{\xi}_t = \xi_0 + \int\limits_0^t a(s, \tilde{\xi}_s)\, ds + \int\limits_0^t b(s, \tilde{\xi}_s)\, d\widehat{w}^\xi_s,$$

которое будет независимым от $\mathcal{F}_\tau$. В свою очередь, процесс $\tilde{\xi}_t$ имеет такое же распределение как и процесс ξ^0_t.

Далее, $\pi^\tau_{\tau+t} = \pi_\tau \Pi^\tau_{\tau+t}$, где $\Pi^\tau_{\tau+t} = \exp\{(\alpha_\pi - \frac{1}{2}\sigma^2_\pi)t + \sigma_\pi \widehat{w}^\pi_t\}\xi^\tau_{\tau+t}$ не зависит от $\mathcal{F}_\tau$. $\Pi^\tau_{t+\tau}$ имеет такое же распределение как $\exp\{(\alpha_\pi - \frac{1}{2}\sigma^2_\pi)t + \sigma_\pi \widehat{w}^\pi_t\}\tilde{\xi}_t$, т.е. как $(\pi_t/\pi_0)\xi^0_t$. Следовательно, $\mathbf{E}(\pi^\tau_t|\mathcal{F}_\tau) = \pi_\tau \mathbf{E}\Pi^\tau_{t+\tau} = \pi_\tau \mathbf{E}(\pi_t \xi^0_t)/\pi_0$. $\square$

Аналогично имеем:

$$\mathbf{E}_\tau I^\tau_{\tau+t} = I_\tau e^{\theta\alpha_I t}, \qquad \mathbf{E}_\tau a^\tau_{\tau+t} = I_\tau[\psi d^a_t + (1-\psi)d^n_t]e^{\theta\alpha_I t},$$

$$\mathbf{E}_\tau p^\tau_{\tau+t} = \gamma_{\text{им}} I_\tau[1 - \psi\widehat{d^a_t} - (1-\psi)\widehat{d^n_t}]e^{\theta\alpha_I t}.$$

Примем следующие обозначения:

$$\tilde\rho = \rho - \theta\alpha_I, \quad A_t = \int\limits_t^\infty d^a_s e^{-\tilde\rho s}\,ds, \quad B_t = \int\limits_t^\infty d^n_s e^{-\tilde\rho s}\,ds,$$

$$\widehat{A}_t = \int\limits_t^\infty (e^{-\tilde\rho t} - e^{-\tilde\rho s})d^a_s\,ds, \quad \widehat{B}_t = \int\limits_t^\infty (e^{-\tilde\rho t} - e^{-\tilde\rho s})d^n_s\,ds.$$

Используя (1.9), сделаем ряд вспомогательных подсчетов: при $\tilde\rho > 0$

$$\int\limits_0^\infty \widehat{d^a_t} e^{-\tilde\rho t}\,dt = \int\limits_0^\infty d^a_s \int\limits_s^\infty e^{-\tilde\rho t}\,dt\,ds = \frac{1}{\tilde\rho}A_0, \qquad \int\limits_0^\infty \widehat{d^n_t} e^{-\tilde\rho t}\,dt = \frac{1}{\tilde\rho}B_0,$$

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{E}_\tau p^\tau_{\tau+t} e^{-\rho t}\,dt = \frac{\gamma_{\text{им}}}{\tilde\rho} I_\tau(1-K), \qquad \int\limits_0^\infty \mathbf{E}_\tau a^\tau_{\tau+t} e^{-\rho t}\,dt = I_\tau K,$$

где

$$K = \psi A_0 + (1-\psi)B_0. \tag{1.25}$$

Теперь из представлений (1.10), (1.22), Утверждения 1.2 и приведенных выше соотношений получается следующее выражение для приведенной прибыли инвестора.

Утверждение 1.3. *Если процесс добавленной стоимости удовлетворяет условиям (1.15)–(1.16) и* $\rho > \max(\alpha_\pi, \theta\alpha_I)$, *то*

$$V_\tau = \frac{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \alpha_\pi}\pi_\tau + I_\tau\left[\gamma_{\text{пр}}K - \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K)\right]. \tag{1.26}$$

Если для процесса добавленной стоимости выполняются (1.17)–(1.18) и

$$\rho > \theta\alpha_I, \qquad c = \int_0^\infty c_t e^{-\rho t} dt < \infty,$$

где c_t *определены в (1.24), то*

$$V_\tau = \frac{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho}c\pi_\tau + I_\tau\left[\gamma_{\text{пр}}K - \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K)\right]. \tag{1.27}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу учета инфляции в рассматриваемой базовой модели. Как уже отмечалось выше, все потоки стоимостей предполагаются дефлированными. Если инфляция однородна и имеет постоянный темп, то она не влияет на интегральный показатель эффективности проекта (номинальный рост денежных потоков обесценивается повышенной ставкой дисконта), подробное обсуждение можно найти, например, в [40, гл. 8]. Если же темп инфляции является разным для потока добавленной стоимости π_t и стоимости начальных инвестиций I_t, то ее можно учесть в рамках сделанных предположений о геометрически-броуновском характере процессов корректировкой средних темпов роста соответствующих процессов. При этом, как видно из Утверждения 1.3, задача инвестора (1.13) остается в классе описанных выше (в разделе 1.6.1) предположений. Само решение этой задачи будет приведено в следующем разделе.

Аналогичными выкладками можно получить следующие выражения для ожидаемых приведенных налоговых выплат в федеральный (1.11) и региональный (1.12) бюджеты: при $\rho > \max(\alpha_\pi, \theta\alpha_I)$

$$T^f_\tau = \frac{\gamma^f}{\rho - \alpha_\pi}\pi_\tau - \gamma^f_{\text{пр}} I_\tau \left[K + \frac{\gamma_{\text{им}}}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K)\right],$$

$$T^r_\tau = \frac{\gamma^r}{\rho - \alpha_\pi}\pi_\tau - I_\tau \left[\gamma^r_{\text{пр}} K - \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma^r_{\text{пр}})}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K)\right],$$

где K определено в (1.25), а

$$\gamma^f = \gamma_{\text{НДС}} + \gamma^f_{\text{пр}}(1-\mu) + \gamma^f_{\text{соц}}\tilde{\mu}, \qquad \gamma^r = \gamma^r_{\text{пр}}(1-\mu) + (\gamma^r_{\text{соц}} + \gamma_{\text{фл}})\tilde{\mu}. \tag{1.28}$$

Здесь предполагается, что для добавленной стоимости выполнены условия (1.15)–(1.16). В случае выполнения условий (1.17)–(1.18) формулы изменятся аналогично тому, как меняются формулы для V_τ в Утверждении 1.3.

1.6.3. Оптимальный момент инвестирования

Как следует из Утверждения 1.3, проблема нахождения оптимального момента инвестирования (1.13) представляет собой задачу об оптимальной остановке двумерного случайного процесса $((I_t, \pi_t),\ t \geq 0)$.

Пусть β есть положительный корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta(\beta-1) + (\alpha_\pi - \alpha_I)\beta - (\rho - \alpha_I) = 0, \tag{1.29}$$

где $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_I^2 - 2r\sigma_I\sigma_\pi + \sigma_\pi^2$ — "полная" волатильность инвестиционного проекта. Нетрудно понять, что $\beta > 1$ при $\rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi)$. Если $\tilde{\sigma} > 0$, то

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_\pi - \alpha_I}{\tilde{\sigma}^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_\pi - \alpha_I}{\tilde{\sigma}^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2(\rho - \alpha_I)}{\tilde{\sigma}^2}}.$$

Следующая теорема полностью описывает оптимальное правило инвестирования. Будем далее в этой главе считать, что процесс добавленной стоимости удовлетворяет условиям (1.15)–(1.16).

Теорема 1.1. *Пусть $\tilde{\sigma} > 0$ и выполнены следующие условия:*

$$\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma_\pi^2 \geq \alpha_I - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2, \quad \rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi). \tag{1.30}$$

Тогда оптимальный момент инвестирования равен

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 :\ \pi_t \geq p^* I_t\}, \tag{1.31}$$

где оптимальный уровень инвестирования есть

$$p^* = \left[1 + \left(\frac{\gamma_{\text{пр}}}{1-\gamma_{\text{пр}}} + \frac{\gamma_{\text{им}}}{\rho - \theta\alpha_I}\right)(1-K)\right] \cdot \frac{\rho - \alpha_\pi}{1-\mu} \cdot \frac{\beta}{\beta - 1}, \tag{1.32}$$

а K определено в (1.25).

Доказательство. Согласно (1.26) имеем: $V_\tau - I_\tau = c_2\pi_\tau - c_1 I_\tau$, где

$$c_1 = 1 - \gamma_{\text{пр}} + \gamma_{\text{пр}}(1-K) + \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K), \quad c_2 = \frac{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \alpha_\pi}.$$

Теперь остается применить Следствие А.1 из Приложения. ☐

Эта теорема показывает, что оптимальный момент инвестирования совпадает с моментом первого достижения отношения процесса виртуальной добавленной стоимости к объему необходимых инвестиций критического уровня (оптимального порога) p^* (Рисунок 1.1).

На соотношение (1.31) можно взглянуть и с несколько другой точки зрения.

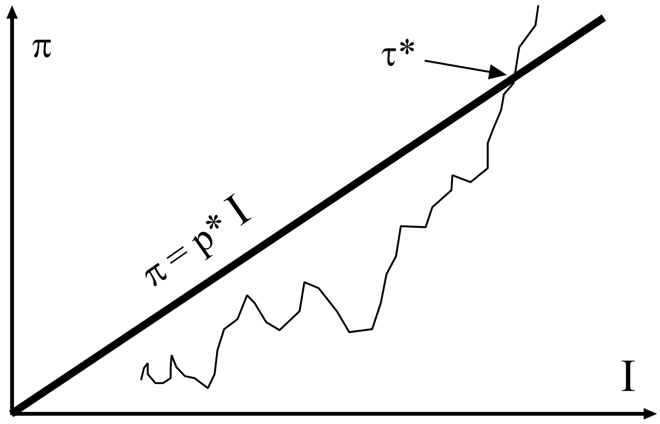


Рисунок 1.1. Оптимальный момент инвестирования

Из формулы (1.26) для приведенной прибыли инвестора V_τ, видно, что оптимальный момент инвестирования будет также равен первому моменту, когда индекс доходности начальных инвестиций V_τ/I_τ достигнет уровня

$$\frac{\beta}{\beta-1}(1-u)+u, \qquad \text{где } \ u=\gamma_{\text{пр}}K-\frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho-\theta\alpha_I}(1-K).$$

Сделаем несколько замечаний по поводу условий (1.30). Первое из них обеспечивает конечность (с вероятностью единица) оптимального момента инвестирования τ^* в (1.31). Второе неравенство из (1.30) означает, что дисконт будет с течением времени "забивать" средние темпы роста инвестиций и добавленной стоимости. В противном случае оптимальный момент инвестирования будет "вырожденным": будет равняться либо 0, либо ∞ в зависимости от начальных условий.

Для того, чтобы избежать тривиального момента инвестирования $\tau^*=0$, будем в дальнейшем предполагать, что начальное значение прибыли π_0 удовлетворяет условию $\pi_0<p^*I$.

Если процесс инвестиций I_t является детерминированным, т.е. $\sigma_I=0$, то задача инвестора (1.13) превращается в задачу оптимальной остановки одномерного процесса $(\pi_t,\ t\geq 0)$. В этом случае условия (1.30) Теоремы 1.1 можно существенно ослабить. Однако при этом оптимальный момент τ^* может стать бесконечным с положительной вероятностью, т.е. вероятность инвестирования проекта на конечном периоде времени может оказаться меньше 1. Величина этой вероятности описывается следующей теоремой.

Теорема 1.2. *Пусть* $\sigma_I = 0$, $\sigma_\pi > 0$ *и* $\rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi)$. *Тогда оптимальный момент инвестирования описывается соотношениями (1.31)–(1.32) и, кроме того,*

$$\mathbf{P}\{\tau^* < \infty\} = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha_\pi - \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 \ge \alpha_I, \\ \left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^{1-2(\alpha_\pi-\alpha_I)/\sigma_\pi^2}, & \text{при } \alpha_\pi - \frac{1}{2}\sigma_\pi^2 < \alpha_I. \end{cases} \tag{1.33}$$

Остановимся отдельно на случае постоянных (не зависящих от времени) детерминированных инвестиций $I_t \equiv I$, который будет возникать в дальнейших главах. Задача инвестора при этом сводится к задаче оптимальной остановки аффинной функции от геометрического броуновского движения $(\pi_t,\ t \ge 0)$ с параметрами $(\alpha_\pi,\ \sigma_\pi)$:

$$\mathbf{E}\left(c_1\pi_\tau - c_2\right)e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_\tau, \tag{1.34}$$

где $c_1,\ c_2 > 0$.

Утверждение 1.4. *Если* $\rho > \alpha_\pi$, *то оптимальным моментом остановки в (1.34) будет*

$$\tau^* = \min\left\{t \ge 0:\ \pi_t \ge \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{c_2}{c_1}\right\}, \tag{1.35}$$

где β *есть положительный корень уравнения* $\frac{1}{2}\sigma_\pi^2\beta(\beta-1) + \alpha_\pi\beta - \rho = 0$.

Формула (1.35) для оптимального момента остановки хорошо известна и лежит в основе теории реальных опционов. В [121] она сформулирована на эмпирическом уровне, строгое доказательство ее имеется, например, в [90, гл. VIII], более общие результаты для произвольных диффузионных процессов см., например, [4, 104].

Зная оптимальный момент инвестирования, можно найти также ожидаемый оптимальный чистый приведенный доход инвестора и ожидаемые налоговые поступления в бюджеты разных уровней. Будем обозначать ожидаемый чистый приведенный доход инвестора при его оптимальном поведении (т.е. максимальное значение функционала в задаче (1.13)) через $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}^f = \mathbf{E}\left(T^f_{\tau^*}e^{-\rho\tau^*}\right)$

есть ожидаемая дисконтированная масса налоговых поступлений в федеральный бюджет при оптимальном поведении инвестора, $\mathcal{T}^r = \mathbf{E}\left(T^r_{\tau^*}e^{-\rho\tau^*}\right)$ – аналогичная величина для регионального бюджета. Представляет также интерес и среднее время ожидания инвестиций $\mathbf{E}\tau^*$.

Используя Теорему А.1 из Приложения, можно получить следующие явные формулы для указанных показателей.

Теорема 1.3. *Если выполнены условия Теоремы 1.1, то справедливы следующие соотношения:*

1) $\mathcal{N} = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^{\beta}\left[1 - \gamma_{\text{пр}}K + \dfrac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho - \theta\alpha_I}(1-K)\right]\cdot\dfrac{1}{\beta-1}$;

2) $\mathcal{T}^f = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^{\beta}\left\{\dfrac{\gamma^f}{\rho-\alpha_\pi}p^* - \gamma^f_{\text{пр}}\left[K + \dfrac{\gamma_{\text{им}}}{\rho-\theta\alpha_I}(1-K)\right]\right\}$,

3) $\mathcal{T}^r = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^{\beta}\left\{\dfrac{\gamma^r}{\rho-\alpha_\pi}p^* - \left[\gamma^r_{\text{пр}}K - \dfrac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma^r_{\text{пр}})}{\rho-\theta\alpha_I}(1-K)\right]\right\}$;

4) $\mathbf{E}\tau^* = \left(\alpha_\pi - \frac{1}{2}\sigma^2_\pi - \alpha_I + \frac{1}{2}\sigma^2_I\right)^{-1}\log\left(\dfrac{Ip^*}{\pi_0}\right)$;

где p^* *определено в (1.32),* γ^f *и* γ^r *в (1.28), а* K *в (1.25).*

Перепишем представленные в этой теореме формулы в несколько другом виде, который будет использоваться в следующих главах. Приведем также формулу для ожидаемых дисконтированных налоговых поступлений в консолидированный бюджет $\mathcal{T} = \mathcal{T}^f + \mathcal{T}^r$. Введем предварительно следующие обозначения:

$$\tilde{\gamma}_{\text{им}} = \frac{\gamma_{\text{им}}}{\rho - \theta\alpha_I}, \quad h_1 = \frac{\gamma^r_{\text{пр}}(1-\tilde{\gamma}_{\text{им}}) + \tilde{\gamma}_{\text{им}}}{\gamma_{\text{пр}}(1-\tilde{\gamma}_{\text{им}}) + \tilde{\gamma}_{\text{им}}}, \quad h_2 = \frac{\gamma^f_{\text{пр}}\tilde{\gamma}_{\text{им}}}{\gamma_{\text{пр}}(1-\tilde{\gamma}_{\text{им}}) + \tilde{\gamma}_{\text{им}}}, \tag{1.36}$$

$$q^r = \frac{\gamma^r}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}, \quad q^f = \frac{\gamma^f}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}, \quad q = q^r + q^f, \tag{1.37}$$

$$\tilde{p} = \frac{\rho - \alpha_\pi}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}, \quad u = \gamma_{\text{пр}}K - \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})(1-K). \tag{1.38}$$

Следствие 1.1. *Если выполнены условия Теоремы 1.1, то справедливы следующие соотношения:*

$$\mathcal{N} = \frac{I^{1-\beta}\pi_0^\beta}{\beta - 1}(\tilde{p})^{-\beta}(1-u)^{1-\beta};$$

$$\mathcal{T}^r = I^{1-\beta}\pi_0^\beta(\tilde{p})^{-\beta}(1-u)^{-\beta}[q^r(1-u) - h_1 u + h_2];$$

$$\mathcal{T}^f = I^{1-\beta}\pi_0^\beta(\tilde{p})^{-\beta}(1-u)^{-\beta}[q^f(1-u) - (1-h_1)u - h_2];$$

$$\mathcal{T} = I^{1-\beta}\pi_0^\beta(\tilde{p})^{-\beta}(1-u)^{-\beta}[q(1-u) - u].$$

О свойствах положительного корня квадратного уравнения типа (1.29). Как видно из приведенных выше результатов, важную роль в формулах для оптимальных показателей в базовой модели инвестора играет показатель β, являющийся корнем квадратного уравнения (1.29). В дальнейших разделах нам понадобятся различные свойства решений уравнений такого же типа, поэтому сформулируем их отдельно.

Будем рассматривать квадратное уравнение

$$ax(x-1) + bx - c = 0. \tag{1.39}$$

Утверждение 1.5. *Если коэффициенты уравнения (1.39) таковы, что* $a > 0$, $c > 0$, $c > b$, *то существует положительный корень* x_+ *уравнения (1.39) и выполняются следующие соотношения:*

1) $x_+ > 1$*;*

2) x_+ *убывает по* a *и* b*;*

3) x_+ *возрастает по* c*.*

Доказательство. Существование положительного корня и свойство 1) сразу следуют из того, что для квадратичной функции $Q(x) = ax(x-1)+bx-c$ имеем: $Q(0) = -c < 0$, $Q(1) = b - c < 0$, $Q(+\infty) = +\infty$.

Свойство 3) вытекает из явной формулы для x_+:

$$x_+ = -\frac{b-a}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b-a}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}. \tag{1.40}$$

Для вывода монотонности x_+ по a и b перепишем (1.40) в виде

$$x_+ = 2c/F(a,b), \qquad \text{где } F(a,b) = b - a + \sqrt{(b-a)^2 + 4ac}\ ,$$

и покажем, что функция $F(a,b)$ возрастает по a и b.

Имеем:

$$F'_b = \frac{\sqrt{(b-a)^2+4ac}+b-a}{\sqrt{(b-a)^2+4ac}} > 0,$$
$$F'_a = \frac{-\sqrt{(b-a)^2+4ac}-(b-a)+2c}{\sqrt{(b-a)^2+4ac}} =$$
$$= \frac{4c^2-4cb}{\sqrt{(b-a)^2+4ac}\left[\sqrt{(b-a)^2+4ac}-(b-a)+2c\right]} > 0,$$

поскольку $c > b$. Утверждение доказано. □

1.7. Перенос убытков на будущее: различные схемы

Как уже отмечалось, при описании схемы налогообложения прибыли было сделано одно упрощение. Она касается случая, когда расходы превышают доходы, и предприятие, тем самым, несет убытки.

Из предложенной формулы (1.10) подсчета приведенных доходов фирмы видно, что для отрицательной прибыли происходит уменьшение приведенных налогов на соответствующую часть прибыли с учетом дисконта. Фактически это означает, что действует принцип "полного возмещения" убытков, но с учетом дисконта.

Понятно, что такой принцип является чересчур "благоприятным" для предприятия. В действительности, в большинстве налоговых систем разрешен перенос убытков на будущее (т.е. суммирование убытков с прибылями будущих периодов) без учета дисконта.

Согласно НК РФ, налоговая база в случае превышения расходов над доходами полагается равной нулю (статья 274), а убытки разрешается переносить на будущее с помощью вычетов из налоговой базы (статья 283). При этом такие вычеты должны осуществляться в определенных временных рамках (в течение не более 10 лет), а сам вычет может быть как на всю сумму убытка, так и на его часть. До 2006 года существовало еще ограничение, что вычеты по убыткам не должны составлять больше 30% от налоговой базы, в 2006 г. оно было изменено на 50%, с 2007 года отменено вообще, но с 2017 г. ограничение в 50% введено опять. Отметим также, что перенос убытков не распространяется на убытки, полученные в период налогообложения по ставке 0% для ряда организаций: образовательных, медицинских, сельскохозяйственных, социального обслуживания, операторов обработки твердых коммунальных отходов, резидентов Сколково, и в некоторых других случаях (статья 283 п.1).

К сожалению, такая реальная схема весьма сложна для исследования. В первую очередь, это касается даже не численных расчетов, а выявления зависимостей показателей инвестиционной активности от различных параметров.

С этой точки зрения предложенная в данной работе схема "полного возмещения" убытков, хотя и страдает определенными изъянами, все же представляется весьма ценной как для проведения теоретического анализа, так и различных расчетов. Именно ей мы и будем следовать в дальнейшем.

Для того, чтобы понять, насколько эта схема отличается от реальной, ниже будет рассмотрена модель схемы "реального возмещения" убытков, а затем будут приведены оценки для сравнения обеих схем: реального и полного возмещения убытков.

Модель "реального возмещения" убытков. Ради простоты будем рассматривать случай детерминированных процессов добавленной стоимости и необходимых инвестиций. Будем также считать, что момент инвестирования равен τ.

Пусть налоговая база по налогу на прибыль в момент t после инвестирования $(t > \tau)$ равна $z_t = q_t - a_t$, где $q_t = \pi_t - s_t - m_t$ – разность между добавленной стоимостью, расходами по оплате труда и прочими расходами (см. (1.1)), а a_t – амортизационные отчисления[9].

Предположим теперь, что эта налоговая база в течение начального периода времени после инвестирования (при $\tau \leq t < \tau + t_0$) отрицательна, а затем становится положительной при всех $t \geq \tau + t_0$. Будем также пренебрегать временны́ми ограничениями на период переноса убытков на будущее и считать,

---

[9] Для сокращения лишних обозначений будем опускать у величин индекс τ, характеризующий момент инвестирования

что перенос можно осуществлять в течение неограниченного срока[10].

С такой прибыли налог, согласно НК РФ, будет взиматься по следующей схеме:

$$\tilde{T}_t = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau \le t \le \tau + t_0, \\ \gamma_{\text{пр}}(z_t - l_t), & \text{при } \tau + t_0 < t \le \tau + t_1, \\ \gamma_{\text{пр}} Z_t, & \text{при } t > \tau + t_1, \end{cases}$$

где l_t представляет собой поток вычетов по возмещению убытков, продолжающийся до того момента, пока не будут "скомпенсированы" все накопленные убытки, равные $\int\limits_{\tau}^{\tau+t_0} (-z_t)\, dt$. Величина t_1, определяющая момент окончания вычета убытков, находится из соотношения

$$\int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} l_t\, dt = -\int\limits_{\tau}^{\tau+t_0} z_t\, dt.$$

Если вычеты не должны уменьшать налоговую базу больше, чем на долю $\varphi \;\; (0 \le \varphi \le 1)$, то естественно положить $l_t = \varphi z_t$. Поэтому момент t_1 определяется из соотношения

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+t_0} z_t\, dt + \varphi \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t\, dt = 0. \tag{1.41}$$

Приведенные чистые доходы фирмы, подсчитанные по изложенной схеме "реального возмещения" убытков, равны

$$\tilde{V}_\tau = \int\limits_{\tau}^{\infty} (q_t - \tilde{T}_t) e^{-\rho(t-\tau)}\, dt = \int\limits_{\tau}^{\tau+t_0} q_t e^{-\rho(t-\tau)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} [q_t - \gamma_{\text{пр}}(1-\varphi) z_t] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt + \int\limits_{\tau+t_1}^{\infty} [(1-\gamma_{\text{пр}}) q_t + \gamma_{\text{пр}} a_t] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt.$$

При этом разность с приведенными чистыми доходами фирмы, рассчитанными

---

[10] Неограниченный перенос убытков вперед имеет место в таких странах, как Франция, Германия, Великобритания, Чили, в США разрешают перенос убытков вперед на 20 лет – см. [77].

по схеме "полного возмещения" (см. (1.10)), будет равна

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\tau - V_\tau = &\int\limits_\tau^{\tau+t_0} [q_t - (1-\gamma_{\text{пр}})q_t - \gamma_{\text{пр}} a_t] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt + \\ &+ \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} [q_t - \gamma_{\text{пр}}(1-\varphi) z_t - (1-\gamma_{\text{пр}})q_t - \gamma_{\text{пр}} a_t] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt = \\ &= \gamma_{\text{пр}} \left[\int\limits_\tau^{\tau+t_0} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\, dt + \varphi \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \right]. \qquad (1.42)\end{aligned}$$

Используя отрицательность и положительность z_t на соответствующих интервалах, имеем

$$\int\limits_\tau^{\tau+t_0} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \le e^{-\rho t_0} \int\limits_\tau^{\tau+t_0} z_t\, dt, \quad \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \le e^{-\rho t_0} \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t\, dt.$$

Поэтому из (1.42) получаем

$$\tilde{V}_\tau - V_\tau \le \gamma_i e^{-\rho t_0} \left[\int\limits_\tau^{\tau+t_0} z_t\, dt + \varphi \int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t\, dt \right] = 0$$

в силу условия (1.41).

Таким образом, приведенные доходы инвестора, рассчитанные по схеме "реального возмещения" убытков всегда будут меньше (точнее, не больше), чем приведенные доходы в схеме "полного возмещения".

Сравнение двух схем. Перейдем к оценке степени аппроксимации одной схемы другой.

Для избежания чересчур громоздких формул будем предполагать, что объем необходимых инвестиций постоянен во времени (т.е. $I_t \equiv I$, переоценка фондов в этой ситуации, естественно, отсутствует), добавленная стоимость π_t растет экпоненциально с показателем α_π (и $\sigma_\pi = 0$), и не будем учитывать налог на имущество (т.е. положим $\gamma_{\text{им}} = 0$). При этом $q_t = (1-\mu)\pi_t$, где μ определено в (1.22), есть разность между добавленной стоимостью, расходами на оплату труда и страховыми взносами. Все основные фонды будем объединять в одну группу и амортизировать единым образом с плотностью амортизации $(d_t,\ t \geq 0)$.

Имеем:

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+t_0} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt = \int\limits_0^{t_0} q_{\tau+t} e^{-\rho t}\,dt - I \int\limits_0^{t_0} d_t e^{-\rho t}\,dt = \\ = \frac{1-\mu}{\widehat{\rho}} \pi_\tau \left(1 - e^{-\widehat{\rho} t_0}\right) - I(A_0 - A_{t_0}),$$

$$\int\limits_{\tau+t_0}^{\tau+t_1} z_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} q_{\tau+t} e^{-\rho t}\,dt - I \int\limits_{t_0}^{t_1} d_t e^{-\rho t}\,dt = \\ = \frac{1-\mu}{\widehat{\rho}} \pi_\tau \left(e^{-\widehat{\rho} t_0} - e^{-\widehat{\rho} t_1}\right) - I(A_{t_0} - A_{t_1}),$$

где $\widehat{\rho} = \rho - \alpha, \quad A_t = \int\limits_t^{\infty} d_s e^{-\rho s}\,ds$. Теперь из (1.42) получаем

$$\tilde{V}_\tau - V_\tau = \gamma_{\text{пр}} \frac{1-\mu}{\widehat{\rho}} \pi_\tau \left[1 - (1{-}\varphi) e^{-\widehat{\rho} t_0} - \varphi e^{-\widehat{\rho} t_1}\right] - \gamma_{\text{пр}} I \left[A_0 - (1{-}\varphi) A_{t_0} - \varphi A_{t_1}\right].$$

С другой стороны, по формуле (1.26) с $\gamma_{\text{им}} = 0$ имеем:

$$V_\tau = \frac{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}{\widehat{\rho}} \pi_\tau + \gamma_{\text{пр}} I A_0.$$

Отсюда получаем относительную оценку аппроксимации схемы "реального возмещения" убытков предлагаемой схемой "полного возмещения":

$$\Delta_\tau := \frac{V_\tau - \tilde{V}_\tau}{V_\tau} = \gamma_{\text{им}} \frac{\widehat{\rho} \tilde{A} I - \pi_\tau (1-\mu) \tilde{E}}{\pi_\tau (1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}}) + \widehat{\rho} \gamma_i A_0 I},$$

где $\tilde{E} = 1 - (1{-}\varphi) e^{-\widehat{\rho} t_0} - \varphi e^{-\widehat{\rho} t_1}, \quad \tilde{A} = A_0 - (1{-}\varphi) A_{t_0} - \varphi A_{t_1}$.

Взяв оптимальный момент инвестирования τ^*, определенный в теореме 1.1 (в данном случае $\beta/(\beta{-}1) = \rho/(\rho{-}\alpha_\pi)$), получаем окончательно

$$\Delta_{\tau^*} = \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\rho - \alpha_\pi \gamma_{\text{пр}} A_0} \left[(\rho - \alpha) \tilde{A} - \rho \frac{1 - \gamma_i A_0}{1 - \gamma_i} \tilde{E}\right].$$

В полученной оценке присутствуют моменты времени t_0 и t_1, определяющие период налоговых вычетов по убыткам прошлых периодов. Нетрудно видеть, что момент t_0 можно характеризовать как

$$t_0 = \max\{t \geq 0 :\ q_{\tau+t} \leq a_{\tau+t}\}$$

(здесь, конечно, предполагается, что $q_\tau \le a_\tau$, иначе налоговая база всегда будет положительной), а t_1 есть корень уравнения

$$g_1(t) = g_2(t),$$

где

$$g_1(t) = (1-\varphi)\int\limits_0^{t_0} a_{\tau+s}\,ds + \varphi\int\limits_0^{t} a_{\tau+s}\,ds, \quad g_2(t) = (1-\varphi)\int\limits_0^{t_0} q_{\tau+s}\,ds + \varphi\int\limits_0^{t} q_{\tau+s}\,ds.$$

Дальнейшее определение величин t_0 и t_1 связано уже с конкретными параметрами модели и методами амортизации. В качестве параметров модели брались $\alpha_\pi \sim 1–2\%$, $\rho \sim 10–15\%$ (все — в годовом исчислении), налоговая ставка $\gamma_{\text{пр}} = 24\%$, доля максимального уменьшения налоговой базы $\varphi = 30\%$ (как было до 2006 года) и $\varphi = 100\%$ (как в настоящее время), метод амортизации — линейный и нелинейный. Расчеты показали, что для "умеренных" величин норматива амортизации (соответствующим срокам полезного использования фондов 5–10 лет) относительная ошибка Δ_{τ^*} при замене "реальной" схемы возмещения убытков на используемую в настоящей работе схему "полного возмещения" не превышает 3–5%.

Аналогичные оценки были выведены и для ожидаемых дисконтированных величин налоговых поступлений в бюджеты разных уровней.

Приведенные результаты дают основание считать используемую в данной работе схему "полного возмещения" убытков достаточно хорошей аппроксимацией существующих "реальных" схем налогового возмещения убытков.

1.8. Учет лага капитальных вложений и возврата НДС

До сих пор предполагалось, что сделанные инвестиции в проект мгновенно приводят к функционированию предприятия и начинают приносить прибыль. Введение в модель *лага капитальных вложений* (в данной модели это — промежуток времени между инвестированием проекта и началом функционирования предприятия), с одной стороны, приближает модель к реальности, а, с другой стороны, позволяет исследовать влияние механизма возврата НДС (уплаченного во время создания предприятия) на поведение инвестора.

Предположим, что инвестирование проекта начинается в момент времени τ, стоимость необходимых инвестиций равна I_τ (без учета НДС), а l есть длительность лага капитальных вложений, в течение которого происходит освоение инвестиций и собственно создание предприятия.

При этом в момент τ у инвестора возникают дополнительные затраты, связанные с выплатой НДС в размере $\gamma_{\text{НДС}} I_\tau$ за приобретение товаров и услуг для создания нового предприятия. В настоящее время налогоплательщики имеют право на возврат НДС (в виде налогового вычета), уплаченного при осуществлении капитальных вложений до окончания ввода объектов в эксплуатацию, причем это право возникает только после завершения капитального строительства (статьи 171 и 172 НК РФ).

Однако на практике такой возврат идет далеко не всегда и зачастую сопровождается сложностями. Поэтому в рамках нашей модели будем рассматривать ситуацию, когда предприятие в момент начала своего функционирования $\tau + l$ получает из федерального бюджета сумму $\varphi\gamma_{\text{НДС}} I_\tau$ в качестве возврата НДС, уплаченного в момент τ за начальные инвестиции, где φ, $0 \le \varphi \le 1$, есть доля возвращенного НДС (при $\varphi = 1$ происходит полный возврат, а при $\varphi = 0$ возврата нет совсем).

С учетом лага капитальных вложений и возврата НДС показатели ожидаемого чистого дохода инвестора (1.10) и ожидаемых приведенных налоговых поступлений в федеральный бюджет (1.11) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} V_\tau &= \varphi\gamma_{\text{НДС}} I_\tau e^{-\rho l} + \\ &+ \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau+l}^{\infty} [(1-\gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - s_t^\tau - m_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}} a_t^\tau] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right), \qquad (1.43) \\ T_\tau^f &= (1 - \varphi e^{-\rho l})\gamma_{\text{НДС}} I_\tau + \\ &+ \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau+l}^{\infty} [\gamma_{\text{НДС}} \pi_t^\tau + \gamma_{\text{пр}}^f (\pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - m_t^\tau) + \gamma_{\text{соц}}^f s_t^\tau] e^{-\rho(t-\tau)}\, dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right). \end{aligned}$$

Формула для приведенных налоговых поступлений в региональный бюджет в случае лага отличается от (1.12) только заменой нижнего предела интегрирования с τ на $\tau + l$.

При наличии лага капитальных вложений и политики возврата НДС задача инвестора должна быть несколько модифицирована. А именно, вместо (1.13) необходимо рассматривать следующую задачу:

$$\mathbf{E}\left[V_\tau - I_\tau(1+\gamma_{\text{НДС}})\right] e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_\tau . \tag{1.44}$$

Если лаг отсутствует, т. е. $l = 0$ и в момент инвестирования τ происходит полный возврат НДС, то задача (1.44) с учетом соотношения (1.43) сводится к (1.13).

В случае лага и "частичного" возврата НДС оптимальный уровень инвестирования равен

$$p^* = \left[\frac{1-\gamma_{\text{пр}}e^{-\rho l}+\gamma_{\text{НДС}}(1-\varphi e^{-\rho l})}{1-\gamma_{\text{пр}}} + e^{-\rho l}\left(\frac{\gamma_{\text{пр}}}{1-\gamma_{\text{пр}}}+\frac{\gamma_{\text{им}}}{\rho-\theta\alpha_I}\right)(1-K)\right]\times$$
$$\times\, e^{(\rho-\alpha_\pi)l}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\mu}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}, \tag{1.45}$$

где K определено в (1.25).

Аналогично можно выписать и ожидаемые приведенные налоговые выплаты в федеральный и региональный бюджеты. К вопросу о возврате НДС мы еще вернемся при модельном анализе налоговой реформы начала 2000-х годов в РФ.

1.9. Учет процесса риска

Будем далее предполагать, что после инвестирования проекта на чистую прибыль инвестора (после уплаты всех налогов) действует процесс риска $(\zeta_t^\tau,\ t\geq\tau,\ \tau\geq 0)$, $0\leq\zeta_t^\tau\leq 1$. Этот процесс риска связан с потерей доли чистой прибыли инвестора в случайные моменты времени после инвестирования. Величина ζ_t^τ показывает, какая часть чистой прибыли (по сравнению с исходным инвестиционным проектом) остается у предприятия в момент времени t.

При этом ожидаемые чистые доходы инвестора после уплаты всех налогов, приведенные к моменту инвестирования, описываются следующим образом:

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^\infty \zeta_t^\tau[(1-\gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - s_t^\tau - m_t^\tau)+\gamma_{\text{пр}}a_t^\tau]e^{-\rho(t-\tau)}\,dt\,\middle|\,\mathcal{F}_\tau\right) \tag{1.46}$$

(сравни с формулой (1.10)).

В качестве *процесса риска* (ζ_t^τ) мы будем рассматривать семейство скачкообразных случайных процессов (с дискретным вмешательством случая) вида

$$\zeta_t^\tau = \prod_{j=1}^{N_t^\tau}(1-\xi_j), \quad t \geq \tau,\ \tau \geq 0$$

где $0 \leq \xi_j \leq 1$ есть доли потерь чистой прибыли инвестора, а N_t^τ – число "неблагоприятных" событий (когда, собственно говоря, и происходят потери), наступивших на интервале $[\tau, t]$.

Доли потерь $\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots$ предполагаются независимыми между собой и от винеровских процессов $(w_t^I,\ t \geq 0)$ и $(w_t^\pi,\ t \geq 0)$ случайными величинами. Интервалы между наступлениями "неблагоприятных" событий также предполагаются независимыми и имеющими экспоненциальное распределение с параметром ε. Такое предположение о распределении интервалов приводит к тому, что число "неблагоприятных" событий $N_t^\tau = N_{t-\tau}$, где $(N_s,\ s \geq 0)$ является пуассоновским процессом с параметром ε.

Отметим, что параметры процесса риска, т.е. интенсивность наступления "неблагоприятных" событий ε и средние доли потерь $\mathbf{E}\xi_j$ могут, вообще говоря, зависеть от параметров проекта.

Рассмотрим для простоты случай, когда средние доли потерь одинаковы, т.е. $\mathbf{E}\xi_j = \bar{\xi},\ j = 1, 2, \ldots$. Тогда, учитывая независимость величин ξ_j и пуассоновского процесса N_t^τ от (w_t^I) и (w_t^π), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\tau \zeta_t^\tau &= \mathbf{E}\prod_{j=1}^{N_t^\tau}(1-\xi_j) = \sum_{n\geq 0}\mathbf{P}\{N_t^\tau = n\}\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}(1-\xi_j) \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon^n (t-\tau)^n}{n!}e^{-\varepsilon(t-\tau)}(1-\bar{\xi})^n = e^{-\delta(t-\tau)},\end{aligned}$$

где $\delta = \varepsilon\bar{\xi}$ есть средняя доля потерь в единицу времени.

Теперь, из формулы (1.46) нетрудно видеть, что параметры процесса риска ζ_t^τ входят только в виде добавки к дисконту величины средней доли потерь в единицу времени δ ("премия за риск"). Так, формула (1.26) будет выглядеть следующим образом:

$$V_\tau = \frac{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho+\delta-\alpha_\pi}\pi_\tau + I_\tau\left[\gamma_{\text{пр}}K^\delta - \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}})}{\rho+\delta-\theta\alpha_I}(1-K^\delta)\right], \qquad (1.47)$$

где

$$K^\delta = \int\limits_0^\infty \left[\psi d_s^a + (1-\psi)d_s^n\right] e^{-(\rho+\delta-\theta\alpha_I)s}\, ds. \qquad (1.48)$$

Совершенно аналогично видоизменяются и формулы для ожидаемых приведенных налоговых выплат в федеральный и региональный бюджеты.

1.10. Модель с агрегированными налогами

В описанной выше модели присутствует около двух десятков различных показателей и параметров, характеризующих как инвестиционный проект, так и налоговую среду, в которой будет происходить реализация проекта. К ним в дальнейшем будут еще добавляться параметры, связанные с различными механизмами стимулирования инвестора.

Понятно, что в этой ситуации аналитическое исследование зависимости описанных выше показателей, связанных с реализацией проекта, от отдельных параметров представляется весьма затруднительным, если вообще возможным. Поэтому далее мы будем также рассматривать и "упрощенный" вариант описанной выше схемы инвестиционного проекта и налоговой среды.

Финансовые результаты деятельности предприятия после начала реализации проекта будут описываться одним случайным процессом π_t, который мы будем условно называть "прибылью" проекта (хотя эта величина может и не быть прибылью в строгом, экономическом смысле этого слова). Такой процесс прибыли может допускать различную интерпретацию в зависимости от изучаемой модели. Приведем некоторые из них, оставаясь в рамках приведенной выше общей схемы функционирования предприятия и соответствующих обозначений[11].

1. Реальный денежный поток (cash-flow) до взятия всех налогов, получа-

---

[11] Индекс τ, связанный с моментом инвестирования проекта, мы опускаем.

ющийся из выручки за вычетом материальных затрат и оплаты труда:

$$\pi_t = (1+\gamma_{\text{НДС}})(x_t - y_t) - s_t = (1+\gamma_{\text{НДС}})\pi_t - s_t.$$

2. Чистый денежный поток после взятия всех налогов, кроме налога на прибыль:

$$\pi_t = x_t - y_t - s_t - m_t = \pi_t - s_t(1+\gamma_{\text{соц}}) - p_t.$$

3. Чистая прибыль (выручка минус себестоимость), т.е. налоговая база по налогу на прибыль:

$$\pi_t = x_t - y_t - s_t - m_t - a_t = \pi_t - s_t(1+\gamma_{\text{соц}}) - p_t - a_t. \tag{1.49}$$

4. Валовая прибыль:

$$\begin{aligned}\pi_t &= (1+\gamma_{\text{НДС}})(x_t - y_t) - s_t - m_t - a_t = \\ &= (1+\gamma_{\text{НДС}})\pi_t - s_t(1+\gamma_{\text{соц}}) - p_t - a_t.\end{aligned}$$

Налоговая система будет описываться одним "агрегированным" налогом γ, который может интерпретироваться как налоговая нагрузка на реализованный проект (или создаваемое предприятие). Иногда мы будем называть его коэффициентом налоговой нагрузки, он характеризует долю прибыли проекта π_t, идущей на уплату всех соответствующих налогов в бюджет. Такой показатель отличается от известных методик расчета налоговой нагрузки предприятий (см., например, [62]) прежде всего базой, относительно которой рассматриваются налоги (выручка от реализации, добавленная стоимость, вновь созданная стоимость, чистая прибыль и др.). Однако, существующие показатели налогового бремени, в частности, сопоставляющие налоги с выручкой или же добавленной стоимостью, могут рассматриваться как нижние оценки для величины γ.

Относительно величины налоговой нагрузки γ будет предполагаться, что она остается постоянной во времени (во всяком случае, в течение периода реализации проекта). В данной "агрегированной" модели при определении величины γ мы также не будем учитывать налог на доходы физических лиц (сотрудников предприятия), поскольку предприятие здесь выступает не как налогоплательщик, а как налоговый агент.

В описанной упрощенной (агрегированной) модели явные формулы для оптимального момента инвестирования τ^*, оптимального ожидаемого NPV инвестора $\mathcal{N}$ и оптимальных ожидаемых налоговых поступлений в бюджет $\mathcal{T}$ (см. п. 1.6.3) записываются в более простом виде.

Пусть необходимые инвестиции в момент t описывается процессом (1.14), а прибыль проекта π_t — процессом геометрического броуновского движения с темпом роста α_π и волатильностью σ_π:

$$\pi_t = \pi_0 + \int\limits_0^t \pi_s(\alpha_\pi\, ds + \sigma_\pi\, dw_s^\pi), \quad t \geq 0,$$

где $(w_t^\pi,\ t \geq 0)$ — винеровский процесс, коррелированный с винеровским процессом w_t^I из (1.14). Тогда, если выполнены условия

$$\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma_\pi^2 \geq \alpha_I - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2, \quad \rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi),$$

то имеют место следующие соотношения:

$$\tau^* = \min\{t \geq 0:\ \pi_t \geq p^* I_t\}, \qquad p^* = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\gamma}I,$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\beta-1}(p^*)^{-\beta}\pi_0^\beta I^{1-\beta}, \quad \mathcal{T} = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma}(p^*)^{-\beta}\pi_0^\beta I^{1-\beta},$$

где β есть положительный корень уравнения

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta(\beta-1) + (\alpha_\pi - \alpha_I)\beta - (\rho - \alpha_I) = 0, \qquad \tilde{\sigma}^2 = \sigma_I^2 - 2r\sigma_I\sigma_\pi + \sigma_\pi^2,$$

а $r = \mathbf{E}(w_t^I w_t^\pi)/t$ — корреляция между винеровскими процессами, определяющими процессы необходимых инвестиций I_t и прибыли π_t.

Приведенные соотношения будут (с необходимыми модификациями) использоваться в дальнейших главах.

1.11. Замечание о детерминированном случае

В завершение остановимся на детерминированном случае и его отличии от стохастической ситуации.

Рассмотрим в качестве примера модель, в которой посленалоговый денежный поток π_t будет детерминированным и постоянным $(\pi_t = \pi,\ t \geq 0)$, и начальные инвестиции также будут детерминированы и постоянны во времени ($I_t = I$).

Если инвестиции в проект делаются в момент времени t, то прибыль от проекта, приведенная к этому моменту, равна

$$V_t = \int_t^\infty \pi e^{-\rho(s-t)} ds = \pi/\rho, \tag{1.50}$$

и поиск оптимального момента инвестирования сводится к простой задаче:

$$(V_t - I)e^{-\rho t} = (\pi/\rho - I)\, e^{-\rho t} \to \max_{t \geq 0}. \tag{1.51}$$

Очевидно, что в этой задаче оптимальный момент t^* либо равен нулю, если $\pi > \rho I$, либо не существует (формально можно полагать $t^* = \infty$), если $\pi < \rho I$.[12] Тем самым, данный детерминированный проект инвестируется или сразу, или никогда (в зависимости от условий — величин денежного потока и необходимых инвестиций).

Рассмотрим теперь стохастический вариант описанного примера.

Пусть инвестиции I остаются постоянными, а денежный поток моделируется случайным процессом геометрического броуновского движения с нулевым темпом роста

$$\pi_t = \pi \exp\{-\tfrac{1}{2}\sigma^2 + \sigma w_t\}, \quad t \geq 0 \tag{1.52}$$

где w_t — винеровский процесс, $\sigma > 0$ — волатильность (характеризующая неопределенность процесса). При этом среднее значение этого процесса постоянно во времени: $\mathbf{E}\pi_t = \pi$ для всех t.

Теперь, если инвестор делает вложения в проект в момент t, то ожидаемое значение прибыли от проекта, приведенное к моменту t, равно

$$V_t = \mathbf{E}\left(\int\limits_t^\infty \pi_s e^{-\rho(s-t)}\, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) = \pi_t/\rho. \tag{1.53}$$

В отличие от детерминированного случая (см. (1.50), условная ожидаемая прибыль уже зависит от сложившейся текущей ситуации. Поскольку с положительной вероятностью эта прибыль может возрасти по сравнению с нулевым

---

[12] Если $\pi = \rho I$, то любой момент времени может считаться оптимальным ("наилучшим"), но при этом делать вложения в проект не имеет смысла, поскольку получится нулевой NPV.

моментом времени (когда она равна π/ρ), то инвестору имеет смысл подождать с вложением в проект. В этой ситуации оптимальный момент инвестирования может быть найден как решение задачи оптимальной остановки

$$\mathbf{E}(V_t - I)e^{-\rho t} = \mathbf{E}\left(\pi_t/\rho - I\right)e^{-\rho t}\chi_{\{t<\infty\}} \to \max_{t\geq 0}, \tag{1.54}$$

где максимум берется по всем случайным (марковским) моментам.

Согласно Утверждению 1.4, оптимальным моментом инвестирования будет случайный момент

$$t^* = \min\left\{t \geq 0: \ \pi_t \geq \frac{\beta}{\beta - 1}\cdot\rho I\right\}, \tag{1.55}$$

где β есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) - \rho = 0$.

Соотношение (1.55) не гарантирует, что оптимальный момент t^* будет конечным с вероятностью 1. Однако, вероятность существования конечного оптимального момента инвестирования проекта *всегда будет положительной*, и, согласно Теореме 1.2, она равна

$$\mathbf{P}(t^* < \infty) = \min\left(1, \frac{\beta-1}{\beta}\cdot\frac{\pi}{\rho I}\right).$$

Приведенные примеры демонстрируют основное различие между детерминированной и стохастической ситуацией, касающееся феномена ожидания инвестиций. Можно сказать, что для детерминированного случая, как правило, действует принцип "инвестировать проект сразу или никогда" в зависимости от начальных условий. В то же время в стохастической ситуации можно говорить, что каждому проекту "дается шанс" быть инвестированным с положительной вероятностью независимо от начальных условий и характеристик прибыли. Этот факт имеет место, по крайней мере, в ситуации, когда прибыль от проекта описывается случайным процессом типа геометрического броуновского движения. Но, скорее всего, этот факт справедлив и для более общих случайных процессов диффузионного типа, которые могут с положительной вероятностью достигать сколь угодно больших значений. Однако, строгое обоснование подобного утверждения, конечно, представляет собой отдельную и трудную задачу.

Глава 2. Механизмы стимулирования инвестиций. Налоговые каникулы

Базовая модель поведения инвестора при финансировании проекта создания новых предприятий, изложенная в предыдущей главе, будет дополнена (в этой и следующих главах) различными механизмами стимулирования инвестиций. Такие механизмы можно подразделить на *налоговые* и *неналоговые*.

Налоговые механизмы, как правило, связаны с уменьшением налоговых обязательств экономических агентов путем снижения налоговых ставок или уменьшения налоговой базы. Эти механизмы не влекут прямого расходования бюджетных средств, хотя существует концепция "налоговых расходов бюджета", в которой налоговые льготы рассматриваются как доходы, упущенные в результате действия отдельных положений налогового законодательства (подробнее см., например, [66]).

К налоговым механизмам стимулирования инвестиций, которые будут рассмотрены далее, мы будем относить:

- налоговые каникулы;
- политика амортизации.

Неналоговые механизмы стимулирования не связаны напрямую с какими-то налогами. В данной работе будут рассматриваться следующие механизмы неналогового стимулирования:

- государственно-частное партнерство (в том числе, прямое софинансирование проектов из бюджета, государственное финансирование инфраструктуры, связанной с инвестиционными проектами, концессионные соглашения);
- субсидирование части затрат на уплату процентов по кредитам, предоставляемым для реализации инвестиционных проектов;

- государственные гарантии перед кредитной организацией по возврату кредита при реализации инвестиционных проектов.

Неналоговые механизмы стимулирования, в отличие от налоговых, требуют прямых финансовых затрат из бюджета (например, софинансирование проекта или субсидии по уплате кредитных процентов), уменьшая тем самым затраты инвестора, но иногда эти затраты могут носить лишь условный характер (например, если рискованный проект потерпит неудачу после финансирования).

Описанная в главе 1 базовая модель поведения инвестора при использовании какого-либо механизма стимулирования из указанных выше будет соответствующим образом модифицироваться. Конкретный вид этой модификации будет описан ниже (в этой и последующих главах) для каждого конкретного механизма стимулирования.[13]

2.1. Постановка задачи стимулирования инвестиций в проекты

Предположим теперь, что для решения каких-то социально-экономических задач государство (в лице региона или федерального центра) заинтересовано в реализации инвестиционного проекта, связанного с созданием предприятия в реальном секторе. При этом государство может воспользоваться некоторым механизмом стимулирования инвестиций $\mathfrak{m}$ из класса допустимых механизмов данного типа $\mathfrak{M}$ (например, различных налоговых каникул, ускоренной амортизации, государственного софинансирования и т.д.).

Основная гипотеза, которой мы придерживаемся в данной работе, состоит в том, что государство при выборе механизма стимулирования считает, что потенциальный инвестор будет поступать в соответствии с моделью, описанной в главе 1 и модифицированной для данного класса механизмов. Пусть $\mathcal{N}_\tau(\mathfrak{m})$ есть NPV инвестора от проекта, реализованного в момент τ в условиях механизма $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$. Оптимальное правило инвестирования (оптимальный момент

---

[13] Результаты данной главы опубликованы в работах [80] и [6, 7, 8, 15, 18, 22, 25, 101, 103] (с соавторами).

инвестирования) $\tau^*(\mathfrak{m})$ является решением задачи инвестора

$$\mathbf{E}\mathcal{N}_\tau(\mathfrak{m})e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_\tau, \tag{2.1}$$

где максимум берется по всем марковским моментам τ.

При этом отсутствие инвестиций в какой-то момент времени трактуется как следствие оптимального поведения инвестора, который по наблюдениям за окружающей средой принял решение отложить финансирование проекта (инвестиционное ожидание).

Зная зависимость оптимального правила инвестирования $\tau^*(\mathfrak{m})$ от параметров налоговой системы и механизма стимулирования $\mathfrak{m}$, государство выбирает этот механизм (из класса допустимых механизмов $\mathfrak{M}$), руководствуясь своими критериями.

Для сравнения различных вариантов механизма стимулирования мы будем применять критерий бюджетного эффекта, который представляет собой разность ожидаемых налоговых поступлений в бюджет от реализованного проекта и ожидаемых затрат государства по использованию соответствующего механизма, приведенную к нулевому моменту времени:

$$B(\mathfrak{m}) = \mathbf{E}\left[T_{\tau^*(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}) - H_{\tau^*(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m})\right] e^{-\rho\tau^*(\mathfrak{m})}, \tag{2.2}$$

где $T_\tau(\mathfrak{m})$ — ожидаемые налоговые поступления в бюджет (консолидированный или региональный в зависимости от целей и механизма стимулирования), приведенные к моменту инвестирования τ; $H_\tau(\mathfrak{m})$ — ожидаемые затраты государства по использованию механизма $\mathfrak{m}$, приведенные к моменту инвестирования τ.

Конечно, эффект от реализации инвестиционного проекта для государства не всегда оценивается только налоговыми поступлениями в бюджет. Помимо пополнения бюджета, реализация инвестиционного проекта может быть связана, например, с экологическими, социальными эффектами, созданием инфраструктуры, развитием политических и экономических связей и т.п. Более того, современное общество стало активно предъявлять к потенциальным инвесторам ряд дополнительных требований, в частности, следование ESG-стандартам, связанным с экологическими, социальными и управленческими критериями.

Однако, в данной работе мы ограничиваемся исследованием бюджетных эффектов, поскольку они, во-первых, входят (как составная часть) в различные методики определения эффективности и критерии отбора инвестиционных проектов, а во-вторых, определяются по достаточно четким правилам Налогового Кодекса (хотя и здесь имеется много нерешенных проблем и неоднозначностей) и, в силу этого, хорошо формализуются.

Для оценки потенциальных возможностей заданного класса механизмов стимулирования предлагается оптимизационный подход, при котором рассматривается механизм $\mathfrak{m}^*$, максимизирующий бюджетный эффект $B(\mathfrak{m})$, определенный в (2.2), по заданному классу механизмов, т.е.

$$B(\mathfrak{m}) \to \max_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}}. \tag{2.3}$$

Описанную выше схему взаимодействия инвестора и государства можно рассматривать как задачу двухуровневой оптимизации при реализации инвестиционного проекта с использованием механизма стимулирования инвестора.

На нижнем уровне в этой схеме находится инвестор, который при заданном (государством) механизме стимулирования $\mathfrak{m}$ стремится максимизировать NPV от проекта, выбирая для этого подходящий момент инвестирования $\tau^*(\mathfrak{m})$, т.е. решить оптимизационную задачу (2.1).

На верхнем уровне находится государство, которое, зная принцип оптимального поведения инвестора (максимизация NPV от проекта), может найти оптимальную стратегию инвестора $\tau^*(\mathfrak{m})$ как функцию от механизма стимулирования $\mathfrak{m}$, а затем выбрать оптимальный механизм (из заданного класса) так, чтобы максимизировать бюджетный эффект $B(\mathfrak{m})$, т.е. решить задачу (2.3).

С точки зрения теоретико-игрового подхода решение задачи двухуровневой оптимизации $(\tau^*(\mathfrak{m}^*), \mathfrak{m}^*)$ можно интерпретировать как равновесие по Штакельбергу в "игре" между инвестором и государством. Стратегией первого игрока (инвестора) является момент инвестирования проекта $\tau^*(\mathfrak{m})$, стратегией второго игрока (государства) — механизм стимулирования $\mathfrak{m}$. Предполагается, что второй игрок знает правила (принципы), по которым первый игрок находит свои оптимальные решения (при любых стратегиях второго игрока). Отметим, что при такой интерпретации использование общих результатов из теории игр в данной схеме не представляется возможным.

Заметим, что наряду с инвестором и государством в системе могут присутствовать и другие участники. Например, кредитные организации, предоставляющие инвестору заем на определенных условиях, зависящих от применяемого государством механизма стимулирования. В этом случае для определения оптимального механизма стимулирования можно использовать схему многоуровневой оптимизации (с числом уровней больше двух). Такого типа трехуровневая оптимизация рассмотрена в главе 6.

Предлагаемый подход к выбору механизма стимулирования можно условно назвать "бюджетно-ориентированным", поскольку последнее слово при выборе остается за государством, преследующим цель максимального ожидаемого наполнения бюджета от реализации данного инвестиционного проекта.

2.2. Налоговые каникулы

Налоговые каникулы, освобождающие предприятия на определенный период от уплаты налогов (полностью или частично), получили широкое распространение в мире как один из эффективных стимулов для привлечения инвестиций в реальный сектор (см., например, [163]).

В России налоговые каникулы по налогу на прибыль (в его региональной части) для новых предприятий активно применялись в 1990-е годы (перечень регионов, которые их использовали, можно найти, например, в [25]). Этому во многом способствовал рост экономической и политической самостоятельности регионов, который создал новые возможности для более эффективного привлечения инвесторов (в том числе и иностранных) на конкретные проекты путем принятия территориальных законов о налоговых и иных льготах, создания своих гарантийных фондов, упрощения бюрократических процедур и т.д. В то же время недобросовестные компании зачастую использовали этот механизм для собственной налоговой оптимизации, регулярно перерегистрируясь и создавая видимость нового предприятия.

Принятая в 2001 г. глава 25 Налогового кодекса (НК) РФ существенно снизила налоговые ставки, но отменила, начиная с 2002 г., большинство льгот по налогу на прибыль предприятий, в том числе и существовавший механизм налоговых каникул. Однако за регионами сохранилась возможность снижения (в ограниченных пределах) региональной ставки налога на прибыль, что можно рассматривать как частичные налоговые каникулы. Налоговые льготы в 2000-х годах стали носить точечный характер и адресоваться лишь предприятиям, связанным с определенным видом деятельности или определенной территорией. Отметим, что в последнее время в российском законодательстве вместо термина "налоговые каникулы" предпочитают говорить о "нулевой ставке налога", поскольку в этом случае даже при отсутствии налоговых выплат налогоплательщик все равно обязан вести налоговый учет и регулярно предоставлять отчетность в соответствующие органы. В данной работе мы не будем делать различия между налоговыми каникулами и нулевой ставкой налога.

Налоговые каникулы по различным налогам, в том числе по налогу на прибыль, были введены в особых экономических зонах (ОЭЗ). В частности, освобождение от федеральной части налога на прибыль установлено в технико-внедренческих, промышленно-производственных, а также объединенных в единый кластер туристско-рекреационных зонах, а освобождение от региональной части налога практикуется для резидентов ОЭЗ "Алабуга", "Липецк", "Тольятти". Предприятия, зарегистрированные в ОЭЗ в Калининградской области, на 6 лет полностью освобождаются от налога на прибыль, а участники ОЭЗ Магаданской области имеют пониженную ставку региональной части налога на прибыль и нулевую ставку в его федеральной части. Аналогичные льготы установлены и для созданной в 2015 г. свободной экономической зоны в Крыму и Севастополе.

Участники региональных инвестиционных проектов (удовлетворяющие требованиям ст. 25.9 НК РФ) получают освобождение на 10 лет от федеральной части налога на прибыль и пониженную (не более 10%) региональную ставку на 5 лет (НК РФ ст. 284, п. 1.5; ст. 284.3, п. 2-3).

Согласно ст. 284.1 НК РФ, организации, осуществляющие образовательную и/или медицинскую деятельность имеют право на освобождение от налога на прибыль при соблюдении ряда условий — наличии лицензии, а также определенной структуры доходов и штата организации. С 1 января 2015 г. такой же льготный режим был распространен и на организации, осуществляющие социальное обслуживание граждан.

Для организаций, получивших статус резидента территорий опережающего социально-экономического развития (ТОР), расположенных в Дальневосточном федеральном округе, в течение 5 лет будет действовать нулевая ставка в федеральной части налога на прибыль и пониженная (не более 5%) в региональной части.

Компании, получившие статус участника проекта "Сколково", в течение 10 лет освобождаются от налога на прибыль при соблюдении некоторых условий на годовой объем выручки и совокупной прибыли (ст. 246.1 НК РФ).

Налоговые каникулы (в том числе индивидуальные) могут также предоставляться в рамках специальных инвестиционных контрактов (СПИК) для отдельных отраслей промышленности, порядок заключения которых определен Постановлением Правительства РФ № 708 от 16.07.2015 г.

В 2015 г. субъектам РФ предоставлено право устанавливать двухлетние налоговые каникулы для индивидуальных предпринимателей, впервые зарегистрировавших свою деятельность в производственной, социальной и научной сферах. Правда, при этом речь идет не о налоге на прибыль, а об упрощенной и патентной системах налогообложения.

Принципы, согласно которым устанавливается длительность налоговых каникул, не отличаются большим разнообразием. Наиболее распространенными являются каникулы на фиксированный срок (2, 5, 10 лет и т.п.). При этом длительность каникул одинаковая для всех предприятий (из определенной группы) и не зависит от их индивидуальных особенностей.

В середине 1990-х годов в ряде регионов России, например, в Новгородской области, в качестве длительности налоговых каникул (по налогу на прибыль) принимался срок окупаемости проекта. Иногда такой принцип дополнялся требованием, что каникулы не должны превышать 3 лет. В таком виде он получил определенное отражение в НК РФ (для вновь создаваемых предприятий) и просуществовал до 2002 г.

Еще один принцип, по которому предоставляются налоговые каникулы, носит дифференцированный характер и связан с текущими показателями деятельности предприятия. Так, резиденты Сколково не платят налог на прибыль, пока их годовой доход не превысит 1 млрд рублей (статья 246.1 НК РФ), а НДС и налог на имущество, если дополнительно объем прибыли в том же году не превышает 300 млн рублей (статьи 145.1 и 381 НК РФ).

Ниже приводятся модели привлечения инвестиций с помощью налоговых каникул, соответствующих упоминавшимся выше принципам их назначения:

1) детерминированной (постоянной) длительности;

2) основанных на сроке окупаемости начальных инвестиций;

3) основанных на уровне текущей прибыли.

2.3. Каникулы детерминированной длительности

Обратимся к базовой модели инвестирования, изложенной в главе 1. Систему налогообложения прибыли предприятий будем теперь характеризовать не только налогами, описанными в предыдущей главе (НДС, налоги на прибыль, на имущество, страховые взносы), но также и налоговыми каникулами по налогу на прибыль.

Налоговые каникулы отсчитываются с момента начала функционирования предприятия, т.е. в нашей модели с момента инвестирования τ (поскольку мы не рассматриваем лаг капитальных вложений). Длительность каникул в данном разделе будет детерминированной величиной, но, вообще говоря, она может быть и случайной, в частности для каникул, основанных на сроке окупаемости, которые будут рассмотрены ниже.

Формула (1.10) для подсчета ожидаемых приведенных чистых доходов инвестора после уплаты налогов, во многом связанная с принципом переноса убытков на будущее, нуждается в определенном уточнении для случая налоговых каникул. В данном случае речь идет о двух периодах времени с разными налогами, поэтому для корректности приводимых далее в этой главе формул будем предполагать следующее.

Во-первых, после окончания налоговых каникул имеет место перенос убытков на будущее (ради простоты не будем здесь учитывать временны́е и количественные ограничения, о которых говорилось в разделе 1.7). А во-вторых, во время каникул выполняется одно из двух требований:

1) нулевая ставка налога на прибыль и отсутствие переноса убытков (что имеет место, согласно статье 283 НК РФ, для ряда организаций);

2) убытки, полученные в течение каникул, полностью переносятся на моменты времени до окончания налоговых каникул ("возмещение" убытков в течение налоговых каникул).

Сформулированные условия обеспечивают отсутствие "перетекания" убытков, накопленных во время каникул, на период после каникул, что, в свою очередь, дает возможность использовать "автономные" формулы для прибыли и налогов на двух различных периодах времени.

Как будет показано ниже, наличие или отсутствие убытков во время каникул может оказывать существенно разное влияние на показатели, связанные с реализацией инвестиционного проекта (более подробно об этом будет говориться в разделах 2.4 и 2.5).

Для того чтобы охватить различные существующие варианты каникул, будем считать, что во время налоговых каникул ставка федеральной части налога на прибыль равна $\gamma_{\text{пр}}^{f0}$, а региональной части — $\gamma_{\text{пр}}^{r0}$. Общую ставку налога на прибыль во время каникул будем обозначать $\gamma_{\text{пр}}^{0} = \gamma_{\text{пр}}^{f0} + \gamma_{\text{пр}}^{r0}$. Пусть ν есть длительность налоговых каникул.

Тогда с учетом сделанных предположений формула для ожидаемых чистых доходов инвестора выглядит следующим образом:

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^{\tau+\nu}[(1-\gamma_{\text{пр}}^0)(\pi_t^\tau - s_t^\tau - m_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}}^0 a_t^\tau]e^{-\rho(t-\tau)}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau+\nu}^{\infty}[(1-\gamma_{\text{пр}})(\pi_t^\tau - s_t^\tau - m_t^\tau) + \gamma_{\text{пр}} a_t^\tau]e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \right| \mathcal{F}_\tau\Bigg) =$$

$$= (1-\gamma_{\text{пр}}^0)\left[\widehat{\pi}_\tau(0) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(0) - \widehat{p}_\tau(0)\right] + \gamma_{\text{пр}}^0\widehat{a}_\tau(0) -$$

$$-(\gamma_{\text{пр}} - \gamma_{\text{пр}}^0)\left[\widehat{\pi}_\tau(\nu) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(\nu) - \widehat{p}_\tau(\nu) - \widehat{a}_\tau(\nu)\right], \tag{2.4}$$

где $\widehat{\pi}_\tau(s) = \mathbf{E}\left(\left.\int\limits_{\tau+s}^{\infty}\pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt\right|\mathcal{F}_\tau\right)$, $s = 0, \nu$, и аналогично для величин s_t^τ, p_t^τ, a_t^τ, определенных в главе 1.

Ожидаемые налоговые поступления от предприятия в федеральный и региональный бюджет (T_τ^f и T_τ^r соответственно), приведенные к моменту инвестирования τ, при наличии каникул будут равны

$$T_\tau^f = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^{\infty}(\gamma_{\text{НДС}}\pi_t^\tau + \gamma_{\text{соц}}^f s_t^\tau)e^{-\rho(t-\tau)}dt + \int\limits_\tau^{\tau+\nu}\gamma_{\text{пр}}^{f0}(\pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - m_t^\tau)e^{-\rho(t-\tau)}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau+\nu}^{\infty}\gamma_{\text{пр}}^f(\pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - m_t^\tau)e^{-\rho(t-\tau)}\,dt\right|\varphi_\tau\Bigg) = \gamma_{\text{НДС}}\widehat{\pi}_\tau(0) + \gamma_{\text{соц}}^f\widehat{s}_\tau(0) +$$

$$+\gamma_{\text{пр}}^{f0}\left[\widehat{\pi}_\tau(0) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(0) - \widehat{p}_\tau(0) - \widehat{a}_\tau(0)\right] +$$

$$+(\gamma_{\text{пр}}^f - \gamma_{\text{пр}}^{f0})\left[\widehat{\pi}_\tau(\nu) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(\nu) - \widehat{p}_\tau(\nu) - \widehat{a}_\tau(\nu)\right], \tag{2.5}$$

$$T_\tau^r = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^\infty \left[(\gamma_{\text{фл}}+\gamma_{\text{соц}}^r)s_t^\tau + p_t^\tau\right] e^{-\rho(t-\tau)}dt+\right.$$

$$+\int\limits_\tau^{\tau+\nu} \gamma_{\text{пр}}^{r0}(\pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - m_t^\tau)e^{-\rho(t-\tau)}dt +$$

$$\left.+\int\limits_{\tau+\nu}^\infty \gamma_{\text{пр}}^r(\pi_t^\tau - s_t^\tau - a_t^\tau - m_t^\tau)]e^{-\rho(t-\tau)}\,dt\,\right|\varphi_\tau\Bigg) =$$

$$= (\gamma_{\text{фл}} + \gamma_{\text{соц}}^r)\widehat{s}_\tau(0) + \widehat{p}_\tau(0) +$$

$$+\gamma_{\text{пр}}^{r0}\left[\widehat{\pi}_\tau(0) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(0) - \widehat{p}_\tau(0) - \widehat{a}_\tau(0)\right] +$$

$$+(\gamma_{\text{пр}}^r - \gamma_{\text{пр}}^{r0})\left[\widehat{\pi}_\tau(\nu) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(\nu) - \widehat{p}_\tau(\nu) - \widehat{a}_\tau(\nu)\right], \tag{2.6}$$

Аналогично, в консолидированный бюджет будет поступать

$$T_\tau = T_\tau^f + T_\tau^r = \gamma_{\text{НДС}}\widehat{\pi}_\tau(0) + (\gamma_{\text{фл}} + \bar{\gamma}_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(0) + \widehat{p}_\tau(0) +$$

$$+\gamma_{\text{пр}}^0\left[\widehat{\pi}_\tau(0) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(0) - \widehat{p}_\tau(0) - \widehat{a}_\tau(0)\right] +$$

$$+(\gamma_{\text{пр}} - \gamma_{\text{пр}}^0)\left[\widehat{\pi}_\tau(\nu) - (1+\gamma_{\text{соц}})\widehat{s}_\tau(\nu) - \widehat{p}_\tau(\nu) - \widehat{a}_\tau(\nu)\right], \tag{2.7}$$

где $\bar{\gamma}_{\text{соц}} = \gamma_{\text{соц}}^f + \gamma_{\text{соц}}^r$.

2.3.1. Оптимальный момент инвестирования

На основе приведенных выше формул можно получить (в явном виде) выражения для оптимального момента инвестирования, являющегося решением задачи инвестора (1.13), а также ожидаемого оптимальный чистый приведенный доход инвестора и ожидаемых налоговых поступлений в бюджеты.

Будем рассматривать базовую модель, описанную в разделах 1.2–1.4, с математическими предположениями из 1.6.1.

Введем обозначения

$$\tilde\rho = \rho - \theta\alpha_I, \quad \tilde\gamma_{\text{им}} = \gamma_{\text{им}}/\tilde\rho, \quad k_t = \psi d_t^a + (1-\psi)d_t^n, \tag{2.8}$$

$$K(s)=\int\limits_s^\infty k_t e^{-\tilde\rho t}\,dt,\ \widehat{K}(s)=\int\limits_s^\infty k_t(e^{-\tilde\rho s}-e^{-\tilde\rho t})\,dt, \quad H(s)=K(s)+\tilde\gamma_{\text{им}}\widehat{K}(s), \tag{2.9}$$

$$\Delta\gamma_{\text{пр}}^f = \gamma_{\text{пр}}^f - \gamma_{\text{пр}}^{f0}, \quad \widehat{\gamma}^f = \gamma_{\text{НДС}}+\gamma_{\text{соц}}^f\tilde\mu+(1-\mu)(\gamma_{\text{пр}}^{f0} + \Delta\gamma_{\text{пр}}^f e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}), \tag{2.10}$$

$$\Delta\gamma_{\text{пр}}^r = \gamma_{\text{пр}}^r - \gamma_{\text{пр}}^{r0}, \quad \widehat{\gamma}^r = (\gamma_{\text{фл}}+\gamma_{\text{соц}}^r)\tilde\mu+(1-\mu)(\gamma_{\text{пр}}^{r0} + \Delta\gamma_{\text{пр}}^r e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}), \tag{2.11}$$

$$\Delta\gamma_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} - \gamma_{\text{пр}}^0, \quad \widehat{\gamma_{\text{пр}}} = \gamma_{\text{пр}}^0 + \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}, \tag{2.12}$$

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}^f + \widehat{\gamma}^r = \gamma_{\text{НДС}} + (\gamma_{\text{фл}}+\bar\gamma_{\text{соц}})\tilde\mu+(1-\mu)\widehat{\gamma_{\text{пр}}}. \tag{2.13}$$

Тогда, как и в разделе 1.6.2, нетрудно вывести следующие соотношения:

$$\widehat{\pi}_\tau(s) = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi}e^{-(\rho-\alpha_\pi)s}, \qquad \widehat{s}_\tau(s) = \tilde\mu\widehat{\pi}_\tau(s), \tag{2.14}$$

$$\widehat{a}_\tau(s) = I_\tau K(s), \quad \widehat{p}_\tau(s) = I_\tau\tilde\gamma_{\text{им}}\widehat{K}(s), \quad \widehat{K}(0) = 1-K(0) = 1-K, \tag{2.15}$$

$$V_\tau = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi}(1-\mu)(1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}) + I_\tau\left[\gamma_{\text{пр}}^0 H(0) + \Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu) - \tilde\gamma_{\text{им}}(1-K)\right], \tag{2.16}$$

$$T_\tau^f = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi}\widehat{\gamma}^f - I_\tau\left[\gamma_{\text{пр}}^{f0}H(0) + \Delta\gamma_{\text{пр}}^f H(\nu)\right], \tag{2.17}$$

$$T_\tau^r = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi}\widehat{\gamma}^r + I_\tau\left[\tilde\gamma_{\text{им}}(1-K) - \gamma_{\text{пр}}^{r0}H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}}^r H(\nu)\right], \tag{2.18}$$

$$T_\tau = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi}\widehat{\gamma} + I_\tau\left[\tilde\gamma_{\text{им}}(1-K) - \gamma_{\text{пр}}^0 H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)\right]. \tag{2.19}$$

Как и для модели без налоговых каникул, рассмотренной в главе 1, ожидаемые чистые приведенные доходы инвестора от проекта являются линейной комбинацией двух геометрических броуновских процессов. Поэтому по аналогии с Теоремой 1.1 нетрудно получить следующее представление для оптимального момента инвестирования для модели с детерминированными налоговыми каникулами.

Теорема 2.1. *Пусть $\tilde\sigma > 0$ и выполнены условия:*

$$\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma_\pi^2 \geq \alpha_I - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2, \quad \rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi).$$

Тогда оптимальный момент инвестирования равен

$$\tau^* = \min\{t \geq 0: \ \pi_t \geq p^* I_t\}, \qquad (2.20)$$

где $p^* = \dfrac{\beta}{\beta-1} \cdot \dfrac{\rho - \alpha_\pi}{(1-\mu)(1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}})} \left[1 + \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K) - \gamma^0_{\text{пр}} H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)\right], \qquad (2.21)$

β есть положительный корень квадратного уравнения (1.29), а остальные входящие величины определены в (2.8), (2.9), (2.12).

Отметим, что выражение в правой части (2.21) будет положительным при любых $\nu \geq 0$, поскольку $H(\nu)$ убывает по ν, и

$$1 + \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K) - \gamma^0_{\text{пр}} H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(0) = 1 - \gamma_{\text{пр}} K + \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K)(1-\gamma_{\text{пр}}) > 0.$$

Как и раньше, для того, чтобы избежать нулевого ("вырожденного") оптимального момента инвестирования $\tau^* = 0$, будем далее считать, если не оговорено противное, что начальные условия таковы, что $p^* > \pi_0/I$. Заметим еще, что в условиях Теоремы 2.1 момент τ^* будет конечным с вероятностью 1.

Теперь из Теоремы А.1 Приложения выводятся явные формулы для ожидаемых NPV от проекта $\mathcal{N}$, а также налоговых поступлений $\mathcal{T}^f$, $\mathcal{T}^r$, $\mathcal{T}$ в бюджеты разных уровней при оптимальном поведении инвестора.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия Теоремы 2.1, то справедливы следующие соотношения:*

1) $\mathcal{N} = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^\beta \left[1 + \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K) - \gamma^0_{\text{пр}} H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)\right] \cdot \dfrac{1}{\beta-1}$;

2) $\mathcal{T}^f = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^\beta \left\{\dfrac{\widehat{\gamma}^f}{\rho-\alpha_\pi} p^* - \left[\gamma^{f0}_{\text{пр}} H(0) + \Delta\gamma^f_{\text{пр}} H(\nu)\right]\right\}$,

3) $\mathcal{T}^r = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^\beta \left\{\dfrac{\widehat{\gamma}^r}{\rho-\alpha_\pi} p^* + \left[\tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K) - \gamma^{r0}_{\text{пр}} H(0) - \Delta\gamma^r_{\text{пр}} H(\nu)\right]\right\}$;

4) $\mathcal{T} = I\left(\dfrac{\pi_0}{Ip^*}\right)^\beta \left\{\dfrac{\widehat{\gamma}}{\rho-\alpha_\pi} p^* + \left[\tilde{\gamma}_{\text{им}}(1{-}K) - \gamma^0_{\text{пр}} H(0) - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)\right]\right\}$;

где p^* определено в (2.21).

2.4. Некоторые парадоксальные эффекты налоговых каникул

Обычно считается, что налоговая нагрузка как и неопределенность, в том числе и в налоговой политике, играют дестимулирующую роль, снижая инвестиционную активность в реальном секторе. Однако, многочисленные эмпирические и модельные исследования показывают, что в условиях неопределенности влияние налоговой политики (ставок и/или налоговых льгот) на инвестиции, в частности, на инвестирование проектов в реальном секторе, может носить сложный характер, иногда весьма далекий от интуитивных представлений. Ситуация еще более усложняется, когда у инвестора есть возможность гибкого принятия решений и откладывания инвестиций до наступления более благоприятной для него обстановки (концепция "реальных опционов"). Возникают "налоговые парадоксы", когда изменение параметров налоговой системы (налоговых ставок или льгот) может приводить, при определенных условиях, к последствиям противоположной направленности, например, как к ускорению, так и к замедлению инвестирования проектов.

Обзор некоторых работ по налоговым парадоксам. Hassett, Metcalf [128] изучали модель, в которой для описания неопределенности использовались случайные процессы двух различных типов: непрерывный (диффузионный) и дискретный (скачкообразный). Непрерывный процесс отражал динамику цен и спроса на товары, а скачкообразный моделировал изменения в налоговой политике, которые авторы связывали, в первую очередь, с появлением и изменением условий инвестиционных налоговых кредитов[14]. Было показано, что процессы разных типов оказывают существенно разное влияние на привлечение инвестиций. Если неопределенность цен (и тем самым прибыли) способствует откладыванию инвестирования на более поздний срок, то скачки в налоговой политике (в случайные моменты времени) стимулируют более раннее инвестирование. Pawlina, Kort в [149] рассмотрели случай, когда объем необходимых для реализации проекта инвестиций может меняться, причем вероятность изменений (например, в результате изменения налоговой полити-

---

[14] Подробный анализ основных налоговых изменений в развитых странах во второй половине 20 века можно найти, например, в [118].

ки) зависит от состояния системы, а именно, от ожидаемой дисконтированной стоимости инвестируемого проекта. Авторы провели численное исследование и обнаружили, что величина и волатильность скачков в инвестициях могут немонотонно влиять на момент инвестирования.

Другой подход к моделированию неопределенности налогов связан с представлением их как случайного процесса, коррелированного с процессом текущей прибыли (см., например, [146]). В рамках такого подхода гипотеза о том, что увеличение налоговой неопределенности (волатильности процесса налоговых выплат) подавляет реальные инвестиции, не получает подтверждения, а инвестиции могут как замедляться, так и ускоряться в зависимости от соотношения между волатильностями процессов налогов и прибыли.

Потенциальными источниками парадоксальных налоговых эффектов могут стать такие факторы как наличие прогрессивной шкалы налогообложения, возможность отказа от продолжения реализации проекта, частичная обратимость сделанных инвестиций.

В работе [96] было показано, что в случае прогрессивного налогообложения при достаточно большой волатильности момент инвестирования положительно зависит от волатильности и отрицательно от ставки налога, что искажает традиционные положения о принятии инвестиционных решений. Различные эффекты влияния прогрессивной шкалы налогообложения на интенсивность и время инвестирования обсуждались также, например, в [172].

Если у инвестора имеется возможность как финансировать проект, так и прекратить его реализацию (при появлении неблагоприятных условий), то возрастание ставки налога может привести к парадоксальному эффекту стимулирования более ранних инвестиций (см., например, [159]). Решающую роль при этом играет именно возможность выхода из проекта, в то время как без нее такой эффект отсутствует. Аналогичные результаты в рамках несколько иной системы налогообложения были установлены в [147]. Неоднозначное влияние неопределенности и налоговых ставок на инвестирование и деинвестирование в условиях различных вариантов частичного возврата сделанных инвестиций исследовалось в [93, 161] и др.

Еще один потенциальный источник налоговых парадоксов связан с нелинейностью правил налогообложения прибыли фирм при наличии налоговых скидок и убытков. Так, MacKie-Mason [141] изучал эффекты, возникающие при различных схемах возмещения убытков и скидок в налогообложении, которые действовали в американской горнодобывающей промышленности в 1960-х годах, и установил, в частности, что увеличение ставки налога в условиях неопределенности цен может стимулировать инвестирование.

Отметим также работу [127], в которой рассматривается модель с простой системой налогов без явного учета амортизации и налоговых вычетов, но с налогообложением процентной ставки. В этих рамках авторы определяют и исследуют три налоговых режима — множеств в пространстве параметров модели — в каждом из которых рост налоговой ставки замедляет инвестирование (нормальный режим), не оказывает на них никакого влияния (нейтральный) или же ускоряет инвестиции (парадоксальный).

Почти во всех работах по обозначенной выше тематике налоговые парадоксы рассматривались по отношению к изменению ставки налога. Однако совершенно аналогично можно говорить и об эффектах, производимых на инвестиционные решения различными механизмами стимулирования.

Из немногочисленных исследований в этом направлении отметим статью [134], в которой рассматривается модель со случайными ценами на выпускаемую продукцию, постоянными затратами и налоговыми каникулами (с нулевой ставкой налога). Предполагается, что создаваемая по проекту фирма может на какое-то время приостановить, а затем возобновить свое функционирование. В результате анализа модели автор приходит к парадоксальным выводам, что увеличение длительности налоговых каникул может дестимулировать инвестирование проекта, а рост ставки налога, наоборот, может его стимулировать.

Несколько иные аспекты, связанные с влиянием налоговых каникул на инвестирование, изучали Azevedo et al. [107]. Они рассматривали модель привлечения инвестиций с помощью налоговых каникул, в течение которых уменьшается ставка налога и невозможно прекратить реализацию проекта. Было установлено, что при небольшом снижении ставки длительность налоговых каникул может немонотонно влиять на момент прихода инвестора. Хотя для большинства случаев неопределенность приостанавливает инвестиции, однако большая степень неопределенности в сочетании с высокой ликвидационной стоимостью (при закрытии проекта) может способствовать ускорению инвестиций.

В данном разделе будет показано, что зависимость оптимального уровня инвестирования p^* (характеризующего оптимальный момент инвестирования) и оптимального ожидаемого NPV $\mathcal{N}$ от длительности налоговых каникул может иметь немонотонный характер, что приводит к определенным парадоксальным эффектам при использовании механизма налоговых каникул для стимулирования инвестора. Такие эффекты могут появляться в случаях, когда в период налоговых каникул возникают убытки, и они не переносятся на будущее (такая ситуация имеет место, согласно статье 283 НК РФ, для ряда организаций, см. раздел 1.7). Тем самым убытки, которые могут уменьшать в дальнейшем налоговую базу и будущие налоги, просто работают "вхолостую", и налоги могут увеличиться по сравнению с отсутствием налоговых каникул.

Для демонстрации указанного эффекта рассмотрим наглядный пример.

Пусть динамика прибыли, амортизационных отчислений и налоговой базы (на 3 года) представлена в следующей таблице, ставка налога на прибыль составляет 20%, а дисконтирование ради упрощения расчетов отсутствует.

Год	Прибыль	Амортизация	Налог. база
1	15	25	–10
2	40	25	15
3	35	25	10

Тогда, если каникулы отсутствуют, то суммарные налоги за 3 года (с учетом переноса убытков первого года на второй год) равны $0 + 0.2(5 + 10) = 3$. В то же время в случае каникул на один год с нулевой ставкой налоги составят $0 + 0.2(15 + 10) = 5$.

Оптимальный уровень инвестирования. Прежде всего представим оптимальный уровень инвестирования p^*, полученный в Теореме 2.1, в виде

$$p^* = \frac{\beta}{\beta-1} \cdot \frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\mu} \cdot \widehat{p}(\nu), \tag{2.22}$$

$$\textit{где } \widehat{p}(\nu) = \frac{H-\Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}, \quad H = 1-\gamma^0_{\text{пр}}K+\tilde{\gamma}_{\text{им}}(1-\gamma^0_{\text{пр}})(1-K). \tag{2.23}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
\widehat{p}'(\nu) &= -\frac{\Delta\gamma_{\text{пр}}H'(\nu)}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}} + [H-\Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)]\frac{\widehat{\gamma_{\text{пр}}}'}{(1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}})^2} = \\
&= \frac{\Delta\gamma_{\text{пр}}}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}\left(k_\nu e^{-\tilde{\rho}\nu} + \tilde{\gamma}_{\text{им}}\tilde{\rho}e^{-\tilde{\rho}\nu}\int_\nu^\infty k_t dt\right) - \\
&\quad -\frac{\Delta\gamma_{\text{пр}}(\rho-\alpha_\pi)}{(1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}})^2}[H-\Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)]e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu} \propto \\
&\propto (k_\nu+\gamma_{\text{им}}q_\nu)\, e^{\theta\alpha_I\nu} - \frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}[H-\Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)]e^{\alpha_\pi\nu},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где $q_\nu = \displaystyle\int_\nu^\infty k_t dt$, а знак $\propto$ здесь и далее будет обозначать "положительную" пропорциональность, т.е. равенство с точностью до положительного множителя. Соотношение (2.24) с учетом равенств (2.20), (2.22), (2.23) и формул из раздела 1.6.2 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^*}{\partial\nu} &\propto (k_\nu+\gamma_{\text{им}}q_\nu)e^{\theta\alpha_I\nu} - \frac{\beta-1}{\beta}(1-\mu)p^*e^{\alpha_\pi\nu} \propto \\
&\propto I_{\tau^*}(k_\nu+\gamma_{\text{им}}q_\nu)e^{\theta\alpha_I\nu} - \frac{\beta-1}{\beta}(1-\mu)\pi_{\tau^*}e^{\alpha_\pi\nu} = \\
&= \mathbf{E}\left(a^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} + p^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right) - \frac{\beta-1}{\beta}(1-\mu)\mathbf{E}\left(\pi^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right).
\end{aligned}$$

Полученное соотношение допускает наглядную экономическую интерпретацию. Заметим, что величина $A = \mathbf{E}\left(a^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} + p^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right)$ представляет собой прогноз (условное математическое ожидание) суммы амортизационных отчислений $a^{\tau^*}_{\tau^*+\nu}$ и налога на имущество предприятия $p^{\tau^*}_{\tau^*+\nu}$ на момент окончания налоговых каникул $\tau^*+\nu$, сделанный в оптимальный момент инвестирования τ^*. Аналогично, величина $\Pi = \mathbf{E}\left(\pi^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right)$ есть прогноз добавленной стоимости на момент $\tau^*+\nu$, сделанный в момент τ^*.

Таким образом, знак производной $\dfrac{\partial p^*}{\partial \nu}$, определяющий локальное поведение уровня инвестирования (а тем самым и оптимального момента инвестирования), зависит от соотношения между прогнозными значениями начисленной амортизации и налога на имущества (A) с одной стороны и добавленной стоимости (Π) с другой стороны на момент окончания налоговых каникул. Если преобладает добавленная стоимость, точнее, $\Pi(1-\mu)(\beta-1)/\beta > A$, то $\dfrac{\partial p^*}{\partial \nu} < 0$, и увеличение налоговых каникул ведет к уменьшению уровня инвестирования, а тем самым, к уменьшению времени инвестиционного ожидания, т.е. стимулирует инвестиционную активность. Однако, если сумма амортизации и налога на имущества достаточно велика по сравнению с добавленной стоимостью и выполняется противоположное неравенство, то получается довольно неожиданный результат: увеличение налоговых каникул ведет к росту оптимального уровня p^* и тем самым к более позднему приходу инвестора, т.е. *снижает* инвестиционную активность.

Оптимальный ожидаемый NPV инвестора. Из Теоремы 2.2 видно, что в той области, где оптимальный уровень p^* убывает по ν, показатель $\mathcal{N}$ будет возрастающей функцией от ν.

Далее, из представления $\mathcal{N}$ (см. Теорему 2.2) и формул для p^* (см. выше) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} &\propto -\beta \frac{\widehat{p}'(\nu)}{\widehat{p}(\nu)}[H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)] - \Delta\gamma_{\text{пр}} H'(\nu) = \\
&= -\beta \frac{\widehat{\gamma_{\text{пр}}}'}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}[H - \Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)] + (\beta-1)\Delta\gamma_{\text{пр}} H'(\nu) = \\
&= \beta \frac{\Delta\gamma_{\text{пр}}(\rho-\alpha_\pi)}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}[H-\Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)]e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu} - (\beta-1)\Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-\rho\nu}(k_\nu + \tilde{\gamma}_{\text{им}}\rho q_\nu) \propto \\
&\propto \frac{\beta}{\beta-1}\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}[H-\Delta\gamma_{\text{пр}} H(\nu)]e^{\alpha_\pi \nu} - (k_\nu + \gamma_{\text{им}} q_\nu) \propto \\
&\propto (1-\mu)\mathbf{E}\left(\pi^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right) - \mathbf{E}\left(a^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} + p^{\tau^*}_{\tau^*+\nu} \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right) .
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что вид производной $\dfrac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu}$ почти такой же, как у $\dfrac{\partial p^*}{\partial \nu}$, только с противоположным знаком. Поэтому характер зависимости $\mathcal{N}$ от ν в целом аналогичен зависимости p^* от ν с точностью до противоположного характера монотонности (убывание вместо возрастания и наоборот). Направление монотонности (убывание или возрастание) определяется, как и выше, соотношением между суммой амортизационных отчислений и налога на имущество предприятия (DP), с одной стороны, и прогнозом добавленной стоимости (П), с другой стороны, на момент окончания налоговых каникул. И также как для оптимального момента инвестирования, здесь возникает "парадоксальный" эффект, когда увеличение налоговых каникул может привести к уменьшению ожидаемого NPV.

2.4.1. Нелинейная амортизация

Продемонстрируем описанные эффекты на примере нелинейного метода амортизации, "непрерывный" вариант которого можно характеризовать экспоненциальной плотностью (1.7) с нормой η, т.е. $k_t = \eta e^{-\eta t},\ t > 0$.

Для этого метода амортизации имеем:

$$q_\nu = e^{-\eta\nu}, \quad H = \frac{\tilde{\rho} + (\eta+\gamma_{\text{им}})(1-\gamma^0_{\text{пр}})}{\tilde{\rho} + \eta}, \quad H(\nu) = \frac{\eta+\gamma_{\text{им}}}{\tilde{\rho} + \eta} e^{-(\tilde{\rho}+\eta)\nu}. \tag{2.25}$$

Введем следующие обозначения:

$$a_0 = (\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\rho-\theta\alpha_I)(1-\gamma^0_{\text{пр}}), \quad a_1 = \Delta\gamma_{\text{пр}}(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I), \tag{2.26}$$

$$a_2 = (\rho-\alpha_\pi)[\rho-\theta\alpha_I+(\eta+\gamma_{\text{им}})(1-\gamma^0_{\text{пр}})], \quad a_3 = \Delta\gamma_{\text{пр}}(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\rho-\theta\alpha_I). \tag{2.27}$$

Чтобы не повторяться, будем далее предполагать, что выполнены условия Теоремы 2.1.

Характер зависимости оптимального уровня инвестирования p^* от длительности налоговых каникул ν полностью описывается следующим образом.

Утверждение 2.1. *Пусть* $\alpha_\pi-\theta\alpha_I+\eta > 0$. *Тогда:*

1) если $(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)(1-\gamma_{\text{пр}}) \le (\rho-\alpha_\pi)(\rho-\theta\alpha_I)$, *то* p^* *монотонно убывает по* ν;

2) если $(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)(1-\gamma_{\text{пр}}) > (\rho-\alpha_\pi)(\rho-\theta\alpha_I)$, *то* p^* *возрастает по* ν *при* $0 \le \nu \le \nu^*$ *и убывает по* ν *при* $\nu > \nu^*$, *где* ν^* *есть корень уравнения*

$$a_1 e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu} + a_2 e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu} = a_0. \tag{2.28}$$

Доказательство. Из соотношения (2.24) с учетом (2.26)–(2.27) имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{p}'(\nu) \propto (\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\tilde{\rho})(1-\gamma^0_{\text{пр}}-\Delta\gamma_{\text{пр}}e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}) -&\\ -(\rho-\alpha_\pi)[\tilde{\rho}+(\eta+\gamma_{\text{им}})(1-\gamma^0_{\text{пр}}-\Delta\gamma_{\text{пр}}e^{-(\tilde{\rho}+\eta)\nu})]e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu} =&\\ = a_0 - a_1e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu} - a_2e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu} =: f(\nu).&\end{aligned} \tag{2.29}$$

Заметим, что $f'(\nu)$ монотонно убывает по ν и

$$\begin{aligned}f'(0) = a_1(\rho-\alpha_\pi) - a_2(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I) \propto&\\ \propto -(\eta+\gamma_{\text{им}})(1-\gamma_{\text{пр}}) - (\rho-\theta\alpha_I) < 0,&\end{aligned}$$

тем самым $f'(\nu) < 0$ при всех $\nu \geq 0$.

Теперь, если $f(0)=(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)(1-\gamma_{\text{пр}})-(\rho-\alpha_\pi)(\rho-\theta\alpha_I)\leq 0$, то $f(\nu) < 0$ при всех $\nu \geq 0$ и значит p^* убывает по ν, что доказывает п.1 Утверждения.

Если $f(0) > 0$, то функция $f(\nu) \propto \widehat{p}'(\nu)$ один раз меняет знак с положительного на отрицательный в точке ν^* такой, что $f(\nu^*) = 0$, т.е. в корне уравнения (2.28). ☐

Таким образом, тип зависимости оптимального момента инвестирования от длительности налоговых каникул определяется пороговым значением нормы амортизации η^*, которое связано с максимальным решением $\bar{\eta}$ квадратного уравнения

$$(\eta+\gamma_{\text{им}})(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I) = \frac{(\rho-\alpha_\pi)(\rho-\theta\alpha_I)}{1-\gamma_{\text{пр}}}. \tag{2.30}$$

Заметим, что это уравнение всегда имеет два корня, один из которых отрицателен, а другой может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку норма амортизации должна быть положительной, то $\eta^* = \max(0, \bar{\eta})$, т.е. в качестве η^* следует взять положительный корень уравнения (2.30), если он существует, или 0, если оба корня отрицательные (в этом случае выполняется п. 2 Утверждения 2.1).

Результат, аналогичный Утверждению 2.1, имеет место и для оптимального ожидаемого NPV инвестора. Для его строгой формулировки нам понадобится дополнительное ограничение на величину нормы амортизации. Обозначим через $\hat{\eta}$ максимальный корень квадратного (по η) уравнения

$$-(\rho-\alpha_\pi)(a_1\beta-a_3)+a_2\beta(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)=0, \tag{2.31}$$

где a_1, a_2, a_3 определены в (2.26)–(2.27). Заметим, что корни уравнения могут быть как положительными, так и отрицательными.

Утверждение 2.2. *Пусть* $\eta+\alpha_\pi>0$ *и* $\eta>\hat{\eta}$. *Тогда:*

1) если

$$(\eta+\gamma_{\text{им}})\left(\eta-\theta\alpha_I+\frac{\beta\alpha_\pi-\rho}{\beta-1}\right)\le\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{(\rho-\alpha_\pi)(\rho-\theta\alpha_I)}{1-\gamma_{\text{пр}}}, \tag{2.32}$$

то $\mathcal{N}$ *монотонно возрастает по* ν*;*

2) если справедливо противоположное к (2.32) неравенство, то $\mathcal{N}$ *убывает по* ν *при* $0\le\nu\le\nu_N^*$ *и возрастает по* ν *при* $\nu>\nu_N^*$*, где* ν_N^* *есть корень уравнения*

$$(a_1\beta-a_3)e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}+a_2\beta e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu}=(\beta-1)a_0. \tag{2.33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично проделанному при доказательстве Утверждения 2.1, нетрудно вывести соотношения:

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial\nu}\propto\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}}}[H-\Delta\gamma_{\text{пр}}H(\nu)]e^{\alpha_\pi\nu}-(k_\nu+\gamma_{\text{им}}r_\nu)\propto g(\nu),$$

где $g(\nu)=-a_0(\beta-1)+(a_1\beta-a_3)e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}+a_2\beta e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu}$. (2.34)

Заметим, что $g'(\nu)>0$ при всех $\nu\ge 0$, поскольку

$$\begin{aligned} g'(\nu) &= -(\rho-\alpha_\pi)(a_1\beta-a_3)e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}+a_2\beta(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu}\propto\\ &\propto -(\rho-\alpha_\pi)(a_1\beta-a_3)+a_2\beta(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu}\ge\\ &\ge -(\rho-\alpha_\pi)(a_1\beta-a_3)+a_2\beta(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)>0 \quad \text{при } \eta>\hat{\eta}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

т.к. коэффициент при квадратичном члене пропорционален $\beta(1-\gamma_{\text{пр}})+\Delta\gamma_{\text{пр}}>0$ и, значит, квадратичная функция остается положительной после максимального корня.

Теперь, как и при доказательстве Утверждения 2.1, если $g(0)=-a_0(\beta-1)+(a_1\beta-a_2)+a_2\beta>0$, т.е. выполнено неравенство (2.32), то $g(\nu)>0$ при всех $\nu \geq 0$ и, значит, $\mathcal{N}$ возрастает по ν. Если же $g(0) < 0$, т.е. выполнено противоположное к (2.32) неравенство, то производная $\dfrac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu}$ один раз меняет знак с отрицательного на положительный в точке ν_N^* такой, что $g(\nu_N^*) = 0$, т.е. в корне уравнения (2.32). В этом случае $\mathcal{N}$ убывает, если $0 \leq \nu \leq \nu_N^*$, и возрастает, если $\nu > \nu_N^*$. Утверждение доказано. □

Таким образом, как и в случае с оптимальным моментом инвестирования тип зависимости оптимального ожидаемого NPV связан с критическим значением нормы амортизации η_N^*, определяемым через максимальный корень $\bar{\bar{\eta}}$ уравнения

$$(\eta + \gamma_{\text{им}})\left(\eta - \theta\alpha_I + \frac{\beta\alpha_\pi - \rho}{\beta - 1}\right) = \frac{\beta}{\beta - 1}\cdot\frac{(\rho - \alpha_\pi)(\rho - \theta\alpha_I)}{1 - \gamma_{\text{пр}}}, \qquad (2.36)$$

который может быть как положительным, так и отрицательным. Порог, при превышении которого появляется немонотонная зависимость NPV от длительности налоговых каникул, можно теперь определить как $\eta_N^* = \max(0, \hat{\eta}, \bar{\bar{\eta}})$.

Заметим, что поскольку $\dfrac{\beta\alpha_\pi - \rho}{\beta - 1} < \alpha_\pi$ и $\dfrac{\beta}{\beta - 1} > 1$, то для корней уравнений (2.30) и (2.36) справедливо неравенство: $\bar{\bar{\eta}} > \bar{\eta}$. Поэтому для критических норм амортизации имеет место неравенство: $\eta^* < \eta_N^*$. Для пороговых значений длительности каникул ν^* и ν_N^*, в которых происходит изменение типа зависимости, из соотношения (2.34) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \nu} &\propto a_0 - a_3 e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu^*} - \beta\left[a_0 - a_1 e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu^*} - a_2 e^{(\eta+\alpha_\pi-\theta\alpha_I)\nu^*}\right] = \\ &= a_0 - a_3 e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu^*} \propto 1 - \gamma_{\text{пр}}^0 - \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu^*} \geq 1 - \gamma_{\text{пр}} > 0, \qquad (2.37)\end{aligned}$$

поскольку ν^* есть корень уравнения (2.28). Отсюда и из п. 2 Утверждения 2.2 следует, что $\nu_N^* < \nu^*$.

Обсуждение. Таким образом, с точки зрения типа зависимости оптимального момента инвестирования и оптимального ожидаемого NPV от длительности налоговых каникул весь диапазон норм амортизации разбивается на три области: $\{0 < \eta < \eta^*\}$, $\{\eta^* \leq \eta < \eta^{**}\}$ и $\{\eta \geq \eta^{**}\}$, которые условно можно назвать областями "малой", "средней" и "большой" амортизации, соответственно. Отметим, что для анализа оптимального ожидаемого NPV область возможных норм амортизации следует ограничить снизу величиной , но как будет сказано ниже, для "разумных" норм амортизации это не является существенным ограничением. Соответствующие графики зависимости p^* и $\mathcal{N}$ от длительности налоговых каникул ν для указанных областей норм амортизации условно представлены на Рисунке 2.1.

В области "малых" норм амортизации (характерных для имущества с большим сроком полезного использования) поведение p^* и $\mathcal{N}$ соответствует экономической интуиции: с ростом длительности налоговых каникул инвестор приходит раньше, а его ожидаемое оптимальное NPV от проекта увеличивается (Рисунок 2.1а).

В диапазоне "средних" норм амортизации уже возникает парадоксальная ситуация, когда увеличение налоговых каникул может и не приводить к более раннему приходу инвестора. А именно, если $0 \leq \nu \leq \nu^*$, то рост налоговых каникул будет увеличивать оптимальный момент инвестирования, и только при $\nu > \nu^*$ будет наблюдаться "естественный" эффект: рост каникул стимулирует инвестора к более раннему приходу. Поэтому, чтобы ускорить реализацию проекта, надо предоставить ему достаточно длительные налоговые каникулы, в то время как маленькие налоговые каникулы могут, напротив, лишь замедлить приход инвестора (в сравнении с отсутствием каникул). Отметим еще, что при "средних" нормах амортизации оптимальный ожидаемый NPV сохраняет свою монотонную зависимость от длительности каникул (Рисунок 2.1б).

При "больших" нормах амортизации, характерных для имущества с маленьким сроком полезного использования, возникают уже два парадоксальных

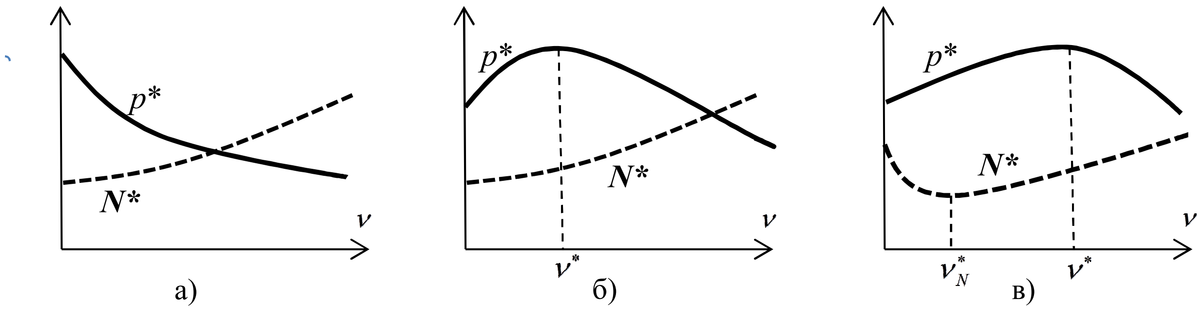


Рисунок 2.1. Зависимость оптимального уровня инвестирования (p^*) и оптимального NPV инвестора (N^*) от длительности налоговых каникул при различных нормах амортизации: а) "малых"; б) "средних"; в) "больших"

эффекта. Сначала, при увеличении длительности каникул до порогового значения ν_N^* оптимальный момент инвестирования возрастает, в то время как оптимальный ожидаемый NPV убывает. Затем, при дальнейшем росте длительности каникул (до величины ν^*) NPV инвестора начинает возрастать, как и оптимальный момент инвестирования. И только при достаточно больших каникулах зависимости и оптимального момента инвестирования, и оптимального ожидаемого NPV инвестора приобретают интуитивно понятный характер (Рисунок 2.1в).

Обратим внимание на налоговые каникулы ν^*, "наихудшие" с точки зрения времени прихода инвестора. Такие каникулы всегда существуют, если норма амортизации превышает некоторый (достаточно маленький) уровень. Кроме того, каникулы длительности ν_N^* будут "наихудшими" с точки зрения NPV инвестора. Тем самым, если использовать налоговые каникулы для стимулирования инвестора (более раннего прихода и увеличения его NPV), то длительность каникул не должна быть маленькой.

2.4.2. Результаты расчетов и некоторые выводы

Чтобы продемонстрировать описанные выше парадоксальные эффекты, были сделаны расчеты на "условно-реальных" численных примерах.

Рассматривались существующие в настоящее время в РФ ставки налогов на прибыль $\gamma_{\text{пр}} = 20\%$ и на имущество $\gamma_{\text{им}} = 2.2\%$, во время каникул ставка налога на прибыль $\gamma_{\text{пр}}^0$ бралась нулевой, ставка дисконтирования полагалась равной 10% (все — в годовом исчислении).

В качестве норм нелинейной амортизации η разумно использовать величины в диапазоне примерно от 0.15 до 0.5, что соответствует нормам, пересчитанным в годовом исчислении из месячных норм, зафиксированных в ст. 259.2 Налогового Кодекса РФ для четвертой–седьмой амортизационных групп имущества со сроком полезного использования от 5 до 20 лет.

Расчеты по определению описанных выше пороговых значений норм амортизации η^*, η^{**} и длительностей налоговых каникул ν^*, ν_N^*, при которых меняется характер поведения оптимального момента инвестирования и оптимального ожидаемого NPV инвестора (как функции от длительности каникул), проводились для инвестиционных проектов, характеристики которых (средний темп роста добавленной стоимости и волатильность) менялись в достаточно широком диапазоне. Отметим, что величина $\hat{\eta}$, ограничивающая снизу нормы амортизации в Утверждении 2.2, как правило, не попадает в область "разумных" норм (т.к. оказывается очень маленькой) и тем самым не вносит дополнительных ограничений при вычислениях. Из результатов проведенных расчетов можно сделать следующие заключения.

1. Пороговое значение амортизации η^*, при превышении которого появляется немонотонная зависимость оптимального уровня инвестирования (и, следовательно, момента инвестирования) от длительности налоговых каникул, слабо чувствительно к изменению среднего темпа роста добавленной стоимости и не зависит от волатильности проекта. Значения, принимаемые η^*, малы и не превышают 0.1. Тем самым, при "разумных" нормах амортизации (указанных выше) имеет место немонотонность оптимального момента инвестирования проекта по длительности налоговых каникул.

2. Длительность налоговых каникул ν^*, при которой оптимальный уровень инвестирования (и оптимальный момент инвестирования) достигает максимума, как правило, лежит в пределах от 3 до 5 лет и не очень чувствительна к норме амортизации.

3. Критическая норма амортизации η^{**} сильно чувствительна к волатильности проекта. При малой волатильности эта величина может лежать в области "разумных" норм амортизации, однако при росте волатильности она увеличивается и выходит за пределы этой области. Таким образом, при достаточно больших волатильностях проекта оптимальный NPV инвестора будет монотонно возрастать с увеличением длительности налоговых каникул.

4. Длительность налоговых каникул ν_N^*, для которой оптимальный ожидаемый NPV инвестора достигает минимума, не очень чувствительна к изменениям среднего темпа роста добавленной стоимости α_π и нормы амортизации. При малой волатильности проекта величина ν_N^* не превышает 3 лет, с ростом

волатильности уменьшается и, начиная с некоторого порогового значения, обращается в 0.

Таким образом, если ограничиться "разумными" значениями нормы амортизации (для имущества со сроком полезного использования от 5 до 20 лет), то можно сделать следующие выводы.

Во-первых, область "малой" амортизации, при которой оптимальный момент инвестирования и оптимальный NPV инвестора монотонно зависят от длительности налоговых каникул (см. Рисунок 2.1а), выходит за рамки "разумных" норм амортизации.

Во-вторых, оптимальный уровень инвестирования, характеризующий оптимальный момент инвестирования, зависит от длительности налоговых каникул немонотонным образом. Более того, существуют налоговые каникулы (лежащие, как правило, в интервале от 3 до 5 лет), "наихудшие" с точки зрения момента инвестирования проекта.

В-третьих, немонотонная зависимость от длительности налоговых каникул возникает также и для оптимального ожидаемого NPV инвестора в случае достаточно маленькой волатильности проекта (этой ситуации соответствует Рисунок 2.1в). Здесь также существуют налоговые каникулы (длительность которых не превышает 3 лет), при наличии которых оптимальный ожидаемый NPV инвестора будет наименьшим (по всем каникулам).

В-четвертых, при большой волатильности проекта (больше некоторого порога) "наихудшие" для инвестора каникулы исчезают, и зависимость оптимального ожидаемого NPV инвестора от длительности налоговых каникул становится монотонно возрастающей (этой ситуации соответствует Рисунок 2.1б).

2.5. Оптимальные налоговые каникулы

Как видно из предыдущего раздела, наличие убытков во время налоговых каникул может приводить к некоторым парадоксальным эффектам, в частности, при этом возникает даже понятие "наихудших" каникул (с точки зрения оптимального времени прихода инвестора и его ожидаемого NPV).

Совсем другая ситуация возникает при отсутствии убытков (положительности налоговой базы по налогу на прибыль). Этот случай будет рассматриваться ниже в разделах данной главы.

Для исследования механизма налоговых каникул (а также других механизмов стимулирования, о которых будет идти речь в последующих главах) удобно будет обратиться к модели с агрегированными налогами, описанной в разделе 1.10 главы 1.

Предположим, что инвестирование проекта происходит в момент времени τ, а стоимость необходимых инвестиций при этом равна I_τ. Пусть π_t^τ, $t \geq \tau$ есть прибыль в момент времени t предприятия, инвестированного в момент времени τ, т.е. разность между выручкой от произведенной продукции и себестоимостью (см. (1.49)), что, по-существу, является налоговой базой по налогу на прибыль. Как уже отмечалось, длительность налоговых каникул может быть случайной величиной (например, если каникулы задаются по сроку окупаемости в условиях случайного характера прибыли), но в данном разделе мы рассматриваем каникулы по налогу на прибыль детерминированной длительности ν.

Как и выше, ставка налога на прибыль есть $\gamma_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}}^f + \gamma_{\text{пр}}^r$, где $\gamma_{\text{пр}}^f$ и $\gamma_{\text{пр}}^r$ — федеральная и региональная ее части, соответственно. Будем обозначать ставку федеральной части налога на прибыль во время налоговых каникул через $\gamma_{\text{пр}}^{f0}$, а региональной части — $\gamma_{\text{пр}}^{r0}$. Наконец, общая ставка налога на прибыль во время каникул есть $\gamma_{\text{пр}}^0 = \gamma_{\text{пр}}^{f0} + \gamma_{\text{пр}}^{r0}$.

Ожидаемая прибыль предприятия (после уплаты налогов), приведенная к моменту инвестирования, определяется выражением

$$\begin{aligned} V_\tau &= \mathbf{E}\left(\int_\tau^{\tau+\nu} (1-\gamma_{\text{пр}}^0)\pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt + \int_{\tau+\nu}^{\infty} (1-\gamma_{\text{пр}})\pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau \right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\int_\tau^{\infty} (1-\gamma_{\text{пр}}^0)\pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt - \int_{\tau+\nu}^{\infty} (\gamma_{\text{пр}}-\gamma_{\text{пр}}^0)\pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau \right) = \\ &= (1-\gamma_{\text{пр}}^0)\Pi_\tau - \Delta\gamma_{\text{пр}} U_\tau(\nu), \qquad \Delta\gamma_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} - \gamma_{\text{пр}}^0, \end{aligned} \tag{2.38}$$

где $\Pi_\tau = \mathbf{E}\left(\int_\tau^\infty \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau \right)$, $\quad U_\tau(\nu) = \mathbf{E}\left(\int_{\tau+\nu}^\infty \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau \right)$.

Ожидаемые поступления по налогу на прибыль в федеральный, региональный и консолидированный бюджеты, приведенные к моменту инвестирования τ, будут соответственно равны:

$$T^f_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^{\tau+\nu} \gamma^{f0}_{\text{пр}}\pi^\tau_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt + \int\limits_{\tau+\nu}^{\infty} \gamma^{f}_{\text{пр}}\pi^\tau_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \gamma^{f0}_{\text{пр}}\Pi_\tau + \Delta\gamma^f_{\text{пр}}U_\tau(\nu),$$

$$T^r_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_\tau^{\tau+\nu} \gamma^{r0}_{\text{пр}}\pi^\tau_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt + \int\limits_{\tau+\nu}^{\infty} \gamma^{r}_{\text{пр}}\pi^\tau_t e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \gamma^{r0}_{\text{пр}}\Pi_\tau + \Delta\gamma^r_{\text{пр}}U_\tau(\nu),$$

$$T_\tau = T^f_\tau + T^r_\tau = \gamma^0_{\text{пр}}\Pi_\tau + \Delta\gamma_{\text{пр}}U_\tau(\nu), \tag{2.39}$$

где $\Delta\gamma^f_{\text{пр}} = \gamma^f_{\text{пр}} - \gamma^{f0}_{\text{пр}}, \quad \Delta\gamma^r_{\text{пр}} = \gamma^r_{\text{пр}} - \gamma^{r0}_{\text{пр}}.$

Как и выше, предполагается, что инвестор выбирает такой момент инвестирования τ, чтобы его ожидаемая чистая приведенная прибыль от реализованного проекта (NPV) была максимальной:

$$\mathbf{E}\,(V_\tau - I_\tau)\,e^{-r\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_\tau, \tag{2.40}$$

где максимум берется по всем марковским моментам τ.

2.5.1. Оптимальный момент инвестирования

Сделаем ряд предположений, которые позволят получать явные формулы для оптимального момента инвестирования в задаче (2.40) и проводить дальнейшие исследования по оптимизации налоговых каникул.

Будем считать, что объем необходимых инвестиций I_τ и прибыль от реализованного проекта π^τ_t удовлетворяют предположениям (1.14) и (1.15)–(1.16) из раздела 1.6.1, а именно,

$$I_t = I + \int\limits_0^t I_s(\alpha_I\,ds + \sigma_I\,dw^I_s), \quad t \geq 0, \tag{2.41}$$

$$\pi^\tau_t = \pi_t, \quad t \geq \tau; \quad \text{где } \pi_t = \pi_0 + \int\limits_0^t \pi_s(\alpha_\pi\,ds + \sigma_\pi\,dw^\pi_s), \quad t \geq 0. \tag{2.42}$$

Винеровские процессы w_t^I и w_t^π предполагаются зависимыми с коэффициентом корреляции r. Ниже будут обсуждаться и другие предположения на процесс прибыли — (1.17)–(1.18).

Как и выше, из сделанных предположений нетрудно вывести следующие соотношения:

$$\Pi_\tau = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}}, \quad U_\tau(\nu) = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}} e^{-\widehat{\rho}\nu}, \quad V_\tau = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}} \left(1 - \gamma_{\text{пр}}^0 - \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-\widehat{\rho}\nu}\right), \tag{2.43}$$

$$T_\tau^f = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}} \left(\gamma_{\text{пр}}^{f0} + \Delta\gamma_{\text{пр}}^f e^{-\widehat{\rho}\nu}\right), \quad T_\tau^r = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}} \left(\gamma_{\text{пр}}^{r0} + \Delta\gamma_{\text{пр}}^r e^{-\widehat{\rho}\nu}\right), \tag{2.44}$$

$$T_\tau = \frac{\pi_\tau}{\widehat{\rho}} \left(\gamma_{\text{пр}}^0 + \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-\widehat{\rho}\nu}\right), \tag{2.45}$$

где $\widehat{\rho} = \rho - \alpha_\pi$.

Будем обозначать $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_I^2 - 2r\sigma_I\sigma_\pi + \sigma_\pi^2$, а β — положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta(\beta - 1) + (\alpha_\pi - \alpha_I)\beta - (\rho - \alpha_I) = 0$ (см. (1.29)).

Используя Следствие А.1 из Приложения и представление (2.43) для V_τ, нетрудно получить следующий результат об оптимальном моменте инвестирования в рассматриваемой в данном разделе модели.

Теорема 2.3. *Пусть $\tilde{\sigma} > 0$ и выполнены условия:*

$$\alpha_\pi - \tfrac{1}{2}\sigma_\pi^2 \geq \alpha_I - \tfrac{1}{2}\sigma_I^2, \quad \rho > \max(\alpha_I, \alpha_\pi).$$

Тогда оптимальный момент инвестирования в задаче (2.40) равен $\tau^* = \min\{t \geq 0 : \ \pi_t \geq p_d^*(\nu) I_t\}$, где

$$p_d^*(\nu) = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha_\pi}{1 - \gamma_{\text{пр}}^0 - \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\rho - \alpha_\pi)\nu}}. \tag{2.46}$$

Для того чтобы избежать тривиального момента инвестирования $\tau^* = 0$, будем предполагать, что начальные значения процессов (I и π_0) удовлетворяют соотношению $\pi_0/I < \beta(\rho - \alpha_\pi)/[(\beta - 1)(1 - \gamma_{\text{пр}}^0)]$, при этом $\pi_0/I < p_d^*(\nu)$ для всех $\nu \geq 0$. Отметим, что как и в Теореме 2.1 оптимальный момент τ^* будет конечным (п.н.).

Зная оптимальный момент инвестирования, можно вычислить ожидаемую оптимальную чистую приведенную прибыль инвестора от будущего предприятия $\mathcal{N}_d(\nu) = \mathbf{E}\left(V_{\tau^*} - I_{\tau^*}\right) e^{-r\tau^*}$, а также ожидаемые приведенные налоговые поступления в бюджеты разных уровней

$$\mathcal{T}_d^f(\nu)=\mathbf{E}\left(T_{\tau^*}^f e^{-r\tau^*}\right), \quad \mathcal{T}_d^r(\nu)=\mathbf{E}\left(T_{\tau^*}^r e^{-r\tau^*}\right), \quad \mathcal{T}_d(\nu)=\mathbf{E}\left(T_{\tau^*} e^{-r\tau^*}\right)$$

при оптимальном поведении инвестора (момент инвестирования — τ^* из Теоремы 2.3). Аналогично Теореме 2.2 получаем:

$$\mathcal{N}_d(\nu)=A_0\left[1-\widehat{\gamma}(\nu)\right]^\beta/\beta, \tag{2.47}$$

$$\mathcal{T}_d^f(\nu)=A_0\left(\gamma_{\text{пр}}^{f0}+\Delta\gamma_{\text{пр}}^f e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}\right)\left[1-\widehat{\gamma}(\nu)\right]^{\beta-1}, \tag{2.48}$$

$$\mathcal{T}_d^r(\nu)=A_0\left(\gamma_{\text{пр}}^{r0}+\Delta\gamma_{\text{пр}}^r e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}\right)\left[1-\widehat{\gamma}(\nu)\right]^{\beta-1}, \tag{2.49}$$

$$\mathcal{T}_d(\nu)=A_0\widehat{\gamma}(\nu)\left[1-\widehat{\gamma}(\nu)\right]^{\beta-1}, \tag{2.50}$$

$$\text{где}\ \ \widehat{\gamma}(\nu)=\gamma_{\text{пр}}^0+\Delta\gamma_{\text{пр}}e^{-(\rho-\alpha_\pi)\nu}, \quad A_0=\frac{\beta}{\beta-1}\left[\frac{\pi_0(\beta-1)}{I\beta(\rho-\alpha_\pi)}\right]^\beta I. \tag{2.51}$$

Другое представление прибыли. Рассмотрим теперь случай, когда процесс прибыли π_t^τ имеет другую структуру, а именно, $\pi_t^\tau=\pi_t\xi_t^\tau,\ t\geq\tau$, где процесс $(\pi_t,\ t\geq 0)$ удовлетворяет соотношению (2.42), а $(\xi_t^\tau,\ t\geq\tau)$ является семейством неотрицательных диффузионных процессов, описываемых формулой (1.18).

Обозначим $c_t=\mathbf{E}(\pi_t\xi_t^0)/\pi_0$ и предполагая, что $c=\int_0^\infty c_t e^{-\rho t}dt<\infty$, введем функцию

$$c(s)=\frac{1}{c}\int_s^\infty c_t e^{-\rho t}dt. \tag{2.52}$$

Тогда для величин Π_τ и $U_\tau(\nu)$, определенных в (2.38), с учетом Утверждения 1.2 имеем:

$$\Pi_\tau=\pi_\tau c, \qquad U_\tau(\nu)=\pi_\tau c\cdot c(\nu),$$

откуда получаем соотношения:

$$V_\tau=\pi_\tau c\left[1-\gamma_{\text{пр}}^0-\Delta\gamma_{\text{пр}}c(\nu)\right], \tag{2.53}$$

$$T_\tau^f=\pi_\tau c\left[\gamma_{\text{пр}}^{f0}+\Delta\gamma_{\text{пр}}^f c(\nu)\right], \quad T_\tau^r=\pi_\tau c\left[\gamma_{\text{пр}}^{r0}+\Delta\gamma_{\text{пр}}^r c(\nu)\right], \tag{2.54}$$

$$T_\tau=\pi_\tau c\left[\gamma_{\text{пр}}^0+\Delta\gamma_{\text{пр}}c(\nu)\right], \tag{2.55}$$

аналогичные установленным выше (2.43)–(2.45) при других предположениях относительно процесса прибыли π_t^τ.

Оптимальным моментом инвестирования для этого случая (сравни с Теоремой 2.3) будет $\tau^* = \min\{t \geq 0 : \ \pi_t \geq p^*_{d1}(\nu) I_t\}$, где

$$p^*_{d1}(\nu) = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{c} \left[1 - \gamma^0_{\text{пр}} - \Delta\gamma_{\text{пр}} c(\nu)\right]^{-1}. \tag{2.56}$$

С учетом этой формулы можно как и выше (см. (2.47)–(2.50)) получить соотношения для ожидаемой чистой приведенной прибыли инвестора от создаваемого предприятия, а также ожидаемые приведенные налоговые поступления в бюджеты при оптимальном моменте инвестирования:

$$\mathcal{N}_{d1}(\nu) = A_1 \left[1 - \widehat{\gamma}_1(\nu)\right]^{\beta} / \beta, \tag{2.57}$$

$$\mathcal{T}^f_{d1}(\nu) = A_1 \left[\gamma^{f0}_{\text{пр}} + \Delta\gamma^f_{\text{пр}} c(\nu)\right] \left[1 - \widehat{\gamma}_1(\nu)\right]^{\beta - 1}, \tag{2.58}$$

$$\mathcal{T}^r_{d1}(\nu) = A_1 \left[\gamma^{r0}_{\text{пр}} + \Delta\gamma^r_{\text{пр}} c(\nu)\right] \left[1 - \widehat{\gamma}_1(\nu)\right]^{\beta - 1}, \tag{2.59}$$

$$\mathcal{T}_{d1}(\nu) = A_1 \widehat{\gamma}_1(\nu) \left[1 - \widehat{\gamma}_1(\nu)\right]^{\beta - 1}, \tag{2.60}$$

где $\widehat{\gamma}_1(\nu) = \gamma^0_{\text{пр}} + \Delta\gamma_{\text{пр}} c(\nu)$, $A_1 = A_0 c^{\beta}$, а A_0 определено в (2.51).

2.5.2. Оптимальные каникулы

В качестве критерия оптимальности здесь будут рассматриваться ожидаемые приведенные налоговые поступления в консолидированный бюджет (естественно, при оптимальном поведении инвестора). Такой выбор критерия обусловлен, в частности, тем, что налог на прибыль предприятий является одним из самых крупных среди всех налоговых поступлений в консолидированный бюджет РФ от предприятий (наряду с НДС и после налога на добычу полезных ископаемых для добывающих отраслей).

Оптимальными (с точки зрения консолидированного бюджета) детерминированными налоговыми каникулами будут такие, которые являются решением задачи

$$\mathcal{T}_d(\nu) \to \sup_{\nu}, \tag{2.61}$$

где супремум берется по всем детерминированным налоговым каникулам длительности $\nu \geq 0$.

Исходя из представления (2.50), имеем:

$$\mathcal{T}'_d(\nu) \propto \widehat{\gamma}\,'(\nu)[1 - \widehat{\gamma}(\nu)] - (\beta - 1)\widehat{\gamma}(\nu)\widehat{\gamma}\,'(\nu) \propto \beta\widehat{\gamma}(\nu) - 1.$$

Учитывая, что $\gamma^0_{\text{пр}} < \widehat{\gamma}(\nu) \le \gamma_{\text{пр}}$, получаем следующий результат о зависимости $\mathcal{T}_d(\nu)$ от длительности налоговых каникул.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.3. Тогда:*

1) если $\beta < 1/\gamma_{\text{пр}}$, то $\mathcal{T}_d(\nu)$ монотонно убывает по ν;

2) если $\beta > 1/\gamma^0_{\text{пр}}$, то $\mathcal{T}_d(\nu)$ монотонно возрастает по ν;

3) если $1/\gamma_{\text{пр}} \le \beta \le 1/\gamma^0_{\text{пр}}$, то $\mathcal{T}_d(\nu)$ возрастает при $0 \le \nu \le \nu^*_d$ и убывает при $\nu > \nu^*_d$, где

$$\nu^*_d = \frac{1}{\rho - \alpha_\pi} \log\left(\frac{\beta\Delta\gamma_{\text{пр}}}{1 - \beta\gamma^0_{\text{пр}}}\right). \tag{2.62}$$

Таким образом, наличие оптимальных налоговых каникул ν^*_d полностью определяется величиной показателя β. При β меньших порогового значения $1/\gamma_{\text{пр}}$ (равного 5 при существующей ставке налога на прибыль) оптимальным, с точки зрения консолидированного бюджета, будет отсутствие налоговых каникул вообще. Заметим также, что в ситуации частичных налоговых каникул, когда общая ставка налога на прибыль во время каникул отлична от нулевой, может возникнуть возможность бесконечных оптимальных каникул (при больших показателях β), которые действуют в течение всего периода функционирования предприятия.

Остановимся более подробно на случае положительных оптимальных каникул. Используя явное выражение для показателя β (см. раздел 1.6.3), условие $\beta > 1/\gamma_{\text{пр}}$ можно записать в виде следующего неравенства:

$$\alpha_\pi - (1 - \gamma_{\text{пр}})\alpha_I + \frac{1 - \gamma_{\text{пр}}}{2\gamma_{\text{пр}}}\tilde{\sigma}^2 < \rho\gamma_{\text{пр}}. \tag{2.63}$$

Условие, когда оптимальные каникулы будут бесконечными, выглядит совершенно аналогично с естественной заменой $\gamma_{\text{пр}}$ на $\gamma^0_{\text{пр}}$.

Несколько упрощая ситуацию, рассмотрим случай постоянного процесса инвестиций, т.е. $\alpha_I = \sigma_I = 0$. При этом неравенство (2.63) превращается в

$$\alpha_\pi + \frac{1 - \gamma_{\text{пр}}}{2\gamma_{\text{пр}}}\sigma^2_\pi < \rho\gamma_{\text{пр}}.$$

На Рисунке 2.2 изображены области различных типов оптимальных налоговых каникул в пространстве параметров прибыли (α, σ), где $\alpha = \alpha_\pi$, $\sigma = \sigma_\pi$.

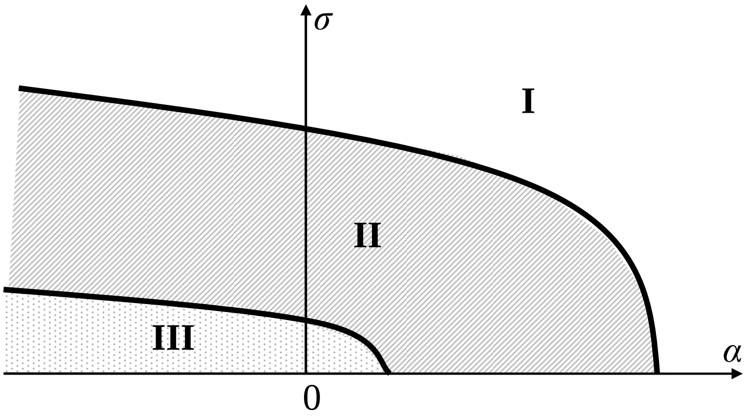


Рисунок 2.2. Различные области оптимальных налоговых каникул:
I – нулевые каникулы; **II** – положительные каникулы; **III** – бесконечные каникулы

При достаточно больших средних темпах прироста и волатильности прибыли, попадающих в область **I**, оптимальные налоговые каникулы будут нулевыми, в области **II** они становятся положительными, а при совсем маленьких волатильностях и средних темпах прироста прибыли (в том числе и отрицательных) из области **III** оптимальным будет назначение налоговых каникул на весь период функционирования предприятия[15].

Отметим еще, что результаты Теоремы 2.4 остаются справедливыми и для случая, когда процесс прибыли имеет не геометрическую броуновскую, а другую структуру, рассмотренную в предыдущем разделе. При этом оптимальные каникулы ν_d^* не описываются формулой (2.62), а будут корнем уравнения $c(\nu) = (1 - \beta\gamma_{\text{пр}}^0)/(\beta\Delta\gamma_{\text{пр}})$, где функция $c(\cdot)$ определена в (2.52).

Согласование интересов инвестора и государства с помощью налоговых каникул. Остановимся еще на одной интерпретации полученных выше результатов Теоремы 2.4.

Прежде всего отметим, что увеличение длительности налоговых каникул ν уменьшает оптимальный уровень инвестирования $p_d^*(\nu)$ (см. (2.46)), что ведет к более раннему инвестированию проекта. При этом также возрастает ожидаемое NPV инвестора от будущего предприятия $\mathcal{N}_d(\nu)$ (см. (2.47)). В этом смысле увеличение длительности налоговых каникул можно рассматривать как стимул для привлечения инвестиций на создание нового предприятия (более раннего

---

[15] При "полных каникулах", когда $\gamma_{\text{пр}}^0 = 0$, область **III** исчезает.

прихода инвестора).

Более сложной является зависимость ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджеты (в частности, в консолидированный) от длительности налоговых каникул.

Как уже отмечалось во Введении, существует точка зрения, что льготы, предоставляемые государством инвестору, даже при отсутствии прямых бюджетных затрат, являются отклонениями от нормальной структуры налогов, неизбежно ведут к определенным потерям, "недополучениям" бюджета (налоговым расходам) и должны учитываться как часть государственных расходов на отдельные виды деятельности или группы налогоплательщиков (см., например, [66, с. 22]). "Предоставление налоговых льгот и освобождений часто вступает в противоречие с основными качественными характеристиками налоговой системы: нейтральностью, справедливостью, эффективностью..., искажает процессы в экономике, отрицательно сказывается на конкуренции, создает риски злоупотреблений..." ([66, с. 201]).

Однако, если речь идет о возникновении *нового* налогоплательщика, то во внимание должны приниматься факторы, связанные с тем, насколько рано появится этот налогоплательщик и как скоро он начнет приносить налоги в бюджет. И в этой ситуации "выгоды" от более раннего поступления налогов в бюджет могут оказаться более значительными, чем прямые или косвенные "потери" от введения льгот.

Продемонстрируем возникающие здесь эффекты с помощью Рисунка 2.2, где представлены три области в пространстве параметров прибыли (среднего темпа прироста и волатильности) с разными типами зависимости ожидаемых приведенных налоговых поступлений в консолидированный бюджет от длительности налоговых каникул.

В области **I** (где $\beta < 1/\gamma_{\text{пр}}$) увеличение длительности налоговых каникул наряду с более ранним инвестированием и ростом NPV инвестора приводит к уменьшению ожидаемых приведенных налоговых поступлений. Поэтому можно говорить, что в области **I** имеет место *рассогласование интересов* инвестора и государства, если под интересами инвестора понимать увеличение его NPV, а под интересами государства — увеличение ожидаемых налоговых поступлений от создаваемого предприятия в консолидированный бюджет. Это означает, что любое стимулирование инвестора с помощью предоставления бо́льших налоговых каникул, увеличивающее его NPV, одновременно ведет к *уменьшению* ожидаемых налоговых поступлений в бюджет.

Если параметры проекта лежат в области **III** (где $\beta > 1/\gamma^0_{\text{пр}}$), то увеличение длительности налоговых каникул вызывает рост ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет. По аналогии с предыдущим случаем можно говорить, что область **III** является областью *полного согласования интересов* инвестора и государства в том смысле, что любое стимулирование инвестора с помощью налоговых каникул одновременно ведет и к *увеличению* ожидаемых налоговых поступлений в бюджет. Тем самым для проектов, параметры прибыли которых лежат в области **III**, увеличение длительности налоговых каникул выгодно одновременно как инвестору, так и государству.

Наконец, в области **II** (где $1/\gamma_{\text{пр}} \leq \beta \leq 1/\gamma^0_{\text{пр}}$) поведение ожидаемых приведенных налоговых поступлений зависит еще и от самой величины длительности налоговых каникул. Эту область можно назвать областью *условного согласования интересов* инвестора и государства, поскольку одновременный рост NPV инвестора и ожидаемых налоговых поступлений в консолидированный бюджет происходит только при условии, что длительность налоговых каникул не превышает оптимального значения ν^*_d, определенного в (2.62). При невыполнении этого условия происходит рассогласование интересов инвестора и государства (в описанном выше смысле).

Отметим еще, что поскольку параметр β убывает с ростом волатильности (см. Утверждение 1.5), то инвестиционный проект при увеличении волатильности может попасть в область рассогласования интересов **I**. Этот факт можно интерпретировать как то, что рост неопределенности может ограничивать возможности механизма налоговых каникул как средства согласования интересов инвестора и государства. И наоборот, уменьшение неопределенности может сдвинуть параметры проекта в область согласования интересов и расширить возможности по привлечению инвестиций.

Оптимальные региональные каникулы. Покажем, как будут выглядеть результаты об оптимальных налоговых каникулах, если в качестве критерия оптимальности рассматривать ожидаемые приведенные поступления в *региональный* бюджет, т.е. следующую задачу:

$$\mathcal{T}^r_d(\nu) \to \sup_{\nu}, \tag{2.64}$$

где супремум берется по всем детерминированным налоговым каникулам длительности $\nu \geq 0$.

Из соотношения (2.49) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\nu}\mathcal{T}^r_d(\nu) &\propto \widehat{\gamma}_r'(\nu)[1-\widehat{\gamma}(\nu)] - (\beta-1)\widehat{\gamma}_r(\nu)\widehat{\gamma}\,'(\nu) \propto \\
&\propto (\beta-1)\left(\gamma^{r0}_{\text{пр}} + \Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}e^{-\widehat{\rho}\nu}\right) - \frac{\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma_{\text{пр}}}\left(1-\gamma^{0}_{\text{пр}} - \Delta\gamma_{\text{пр}}e^{-\widehat{\rho}\nu}\right) \propto \\
&\propto \Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}e^{-\widehat{\rho}\nu} + \frac{\beta-1}{\beta}\gamma^{r0}_{\text{пр}} - \frac{\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma_{\text{пр}}}\cdot\frac{1-\gamma^{0}_{\text{пр}}}{\beta},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

где $\widehat{\rho} = \rho - \alpha_\pi, \quad \widehat{\gamma}_r(\nu) = \gamma^{r0}_{\text{пр}} + \Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}e^{-\widehat{\rho}\nu}$.

Заметим, что если во время каникул региональная ставка налога не меняется ($\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}} = 0$), то $\mathcal{T}^r_d(\nu)$ будут возрастать с ростом длительности каникул, т.к. инвестор будет приходить раньше. Далее будем считать, что $\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}} > 0$, т.е. региональная ставка во время налоговых каникул становится меньше.

Как видно из соотношения (2.65), вид зависимости ожидаемых налоговых поступлений в региональный бюджет от длительности налоговых каникул полностью определяется знаком величины $e^{-\widehat{\rho}\nu} - \widehat{\beta}$, где

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1-\gamma^{0}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma_{\text{пр}}} - \frac{\beta-1}{\beta}\cdot\frac{\gamma^{r0}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}} = \frac{1}{\beta}\tilde{\gamma} - \frac{\gamma^{r0}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}}, \\
\tilde{\gamma} &= \frac{1-\gamma^{0}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma_{\text{пр}}} + \frac{\gamma^{r0}_{\text{пр}}}{\Delta\gamma^{r}_{\text{пр}}}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Как нетрудно видеть, различные типы поведения налоговых поступлений в региональный бюджет определяются условиями: $\widehat{\beta} > 1$, $\widehat{\beta} < 0$ и $0 \leq \widehat{\beta} \leq 1$. Переходя, согласно соотношению (2.66), к соответствующим условиям на показатель β, получаем следующий вариант Теоремы 2.4 для ожидаемых приведенных налоговых поступлений в региональный бюджет $\mathcal{T}^r_d(\nu)$.

Теорема 2.4$'$. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.3. Тогда:*

1) если $\beta < \tilde{\gamma}\Delta\gamma^r_{\text{пр}}/\gamma^r_{\text{пр}}$, *то* $\mathcal{T}^r_d(\nu)$ *монотонно убывает по* ν*;*

2) если $\beta\gamma^{r0}_{\text{пр}} > \tilde{\gamma}\Delta\gamma^r_{\text{пр}}$, *то* $\mathcal{T}^r_d(\nu)$ *монотонно возрастает по* ν*;*

3) если $\beta \geq \tilde{\gamma}\Delta\gamma^r_{\text{пр}}/\gamma^r_{\text{пр}}$ *и* $\beta\gamma^{r0}_{\text{пр}} \leq \tilde{\gamma}\Delta\gamma^r_{\text{пр}}$, *то* $\mathcal{T}^r_d(\nu)$ *возрастает при* $0 \leq \nu \leq \nu^{r*}_d$ *и убывает при* $\nu > \nu^{r*}_d$, *где*

$$\nu^{r*}_d = \frac{1}{\rho - \alpha_\pi} \log\left(\frac{\beta\Delta\gamma_{\text{пр}}}{\tilde{\gamma}\Delta\gamma_{\text{пр}} - \beta\gamma^{r0}_{\text{пр}}}\right),$$

а $\tilde{\gamma}$ *определено в (2.66).*

Отметим, что если во время каникул региональная ставка налога равна нулю ($\gamma^{r0}_{\text{пр}} = 0$), то условие п.2 Теоремы 2.4$'$ не выполняется ни при каком β и, следовательно, $\mathcal{T}^r_d(\nu)$ не может быть возрастающей функцией. Таким образом, в этом случае можно привести простое описание оптимальных региональных налоговых каникул ν^{r*}_d, являющихся решением задачи максимизации регионального бюджета (2.64).

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.3 и* $\gamma^{r0}_{\text{пр}} = 0$. *Тогда:*

$$\nu^{r*}_d = \begin{cases} 0, & \textit{если} \;\; \beta \leq (1 - \gamma^{f0}_{\text{пр}})/\Delta\gamma_{\text{пр}}, \\ \dfrac{1}{\rho - \alpha_\pi} \log\left(\dfrac{\beta\Delta\gamma_{\text{пр}}}{1 - \gamma^{f0}_{\text{пр}}}\right), & \textit{если} \;\; \beta > (1 - \gamma^{f0}_{\text{пр}})/\Delta\gamma_{\text{пр}}. \end{cases}$$

Как показывают представленные выше результаты, общая структура областей различных типов оптимальных региональных налоговых каникул такая же как и для каникул, оптимальных с точки зрения налоговых поступлений в консолидированный бюджет. Соответствующие области будут иметь в целом такой же вид как на Рисунке 2.2 с точностью до сдвига и масштабирования. Как и выше, их можно интерпретировать с точки зрения согласования интересов инвестора и государства (в данном случае, региона).

2.6. Налоговые каникулы, основанные на сроке окупаемости

Как отмечалось выше, одним из принципов вариантов выбора длительности налоговых каникул для создаваемых предприятий является срок окупаемости (СО) соответствующего инвестиционного проекта. В данной работе в качестве срока окупаемости рассматривается длительность интервала времени, отсчитываемого от момента инвестирования, в течение которого ожидаемая накопленная прибыль предприятия (приведенная к моменту инвестирования) станет равной начальным инвестициям. Поскольку прибыль предприятия в момент инвестирования в рамках рассматриваемой модели является случайным процессом, срок окупаемости представляет собой случайную величину.

Обобщением понятия срока окупаемости будет *модифицированный срок окупаемости (МСО)*, определяемый как длительность такого интервала времени, по истечении которого отношение ожидаемой дисконтированной накопленной за это время прибыли к объему начальных инвестиций становится равным заданному нормативу окупаемости θ:

$$\nu_{pb}(\theta) = \inf\{\nu \geq 0 : \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau}^{\tau+\nu} \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) \geq \theta I_\tau\}. \tag{2.67}$$

Если в этой формуле inf не достигается, то полагаем $\nu_{pb}(\theta) = \infty$. Нетрудно убедиться, что в условиях сделанных выше предположений (1.14)–(1.16) о динамике процессов I_t и π_t^τ, это происходит в том и только том случае, когда

$$\mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty} \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \frac{\pi_\tau}{\rho - \alpha_\pi} \leq \theta I_\tau.$$

Обычный срок окупаемости получается как частный случай МСО при нормативе окупаемости $\theta = 1$. Отметим, что величина $\nu_{pb}(\theta)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$, в частности, она будет случайной величиной (причем не обязательно конечной), зависящей от момента инвестирования τ.

Для величины $U_\tau(\nu)$, определенной в (2.38), в этом случае получаем

$$\begin{aligned}
U_\tau(\nu_{pb}(\theta)) &= \mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu_{pb}(\theta)<\infty\}} \int\limits_{\tau+\nu_{pb}(\theta)}^{\infty} \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu_{pb}(\theta)<\infty\}} \left[\int\limits_{\tau}^{\infty}(\cdot) - \int\limits_{\tau}^{\tau+\nu_{pb}(\theta)}(\cdot)\right] \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \left(\frac{\pi_\tau}{\rho - \alpha_\pi} - \theta I_\tau\right)\chi_{\{\nu_{pb}(\theta)<\infty\}}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Выражение для ожидаемой прибыли предприятия V_τ выглядит в этом случае несколько сложнее, чем для детерминированных налоговых каникул:

$$V_\tau = \begin{cases} (1-\gamma_{\text{пр}}^0)\pi_\tau/(\rho-\alpha_\pi), & \text{если} \;\; \pi_\tau \le \theta(\rho-\alpha_\pi)I_\tau, \\ (1-\gamma_{\text{пр}})\pi_\tau/(\rho-\alpha_\pi)+\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta I_\tau, & \text{если} \;\; \pi_\tau > \theta(\rho-\alpha_\pi)I_\tau. \end{cases}$$

Оптимальный момент инвестирования при наличии налоговых каникул $\nu_{pb}(\theta)$, основанных на модифицированном сроке окупаемости, описывается следующим образом.

Теорема 2.5. *Пусть* $0 \le \theta \le \theta_0 = [1-\gamma_{\text{пр}}^0 - (1-\gamma_{\text{пр}})/\beta]^{-1}$ *и выполнены условия Теоремы 2.3. Тогда оптимальный момент инвестирования в задаче (2.40) равен* $\tau^* = \min\{t \ge 0: \;\pi_t \ge p_{pb}^*(\theta)I_t\}$, *где*

$$p_{pb}^*(\theta) = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{(\rho-\alpha_\pi)(1-\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta)}{1-\gamma_{\text{пр}}}. \tag{2.69}$$

Доказательство. Как и при доказательстве Теоремы 2.3, задача инвестора (2.40) сводится к оптимальной остановке двумерного процесса (π_t, I_t), но при этом функция платы уже будет кусочно-линейной:

$$g(\pi,I) = \begin{cases} g_1(\pi,I) = \dfrac{1-\gamma_{\text{пр}}}{\rho-\alpha_\pi}\pi - (1-\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta)I, & \text{если} \;\; \pi > \theta(\rho-\alpha_\pi)I, \\ g_2(\pi,I) = \dfrac{1-\gamma_{\text{пр}}^0}{\rho-\alpha_\pi}\pi - I, & \text{если} \;\; \pi \le \theta(\rho-\alpha_\pi)I. \end{cases} \tag{2.70}$$

Для нахождения оптимальной остановки в такой задаче можно воспользоваться следующей простой леммой.

Лемма 2.1. *Пусть* X_t *есть случайный процесс со значениями в* R^n, $g_1, g_2: R^n \to R^1$ *и*

$$g(x) = \min\left(g_1(x), g_2(x)\right) = \begin{cases} g_1(x), & \textit{если} \;\; x \in G, \\ g_2(x), & \textit{если} \;\; x \notin G. \end{cases}$$

Если τ_1^* *максимизирует* $\mathbf{E}g_1(X_\tau)e^{-\rho\tau}$ *по всем марковским моментам* τ *и* $X_{\tau_1^*} \in G$ *(п.н.), то* τ_1^* *является оптимальным моментом остановки и в задаче* $\mathbf{E}g(X_\tau)e^{-\rho\tau} \to \max$.

Доказательство леммы сразу следует из неравенств:

$$\mathbf{E}g(X_\tau)e^{-\rho\tau} \le \mathbf{E}g_1(X_\tau)e^{-\rho\tau} \le \mathbf{E}g_1(X_{\tau_1^*})e^{-\rho\tau_1^*} = \mathbf{E}g(X_{\tau_1^*})e^{-\rho\tau_1^*}$$

для любого марковского момента τ.

Теперь для доказательства теоремы достаточно применить Лемму 2.1 к функциям g_1 и g_2 из (2.70) и множеству $G{=}\{(\pi, I) :\ \pi{\ge}\theta(\rho{-}\alpha_\pi)I\}$. При этом

$$\tau_1^* = \min\{t \ge 0 :\ \pi_t \ge p_1^* I_t\}, \quad \text{где } p_1^* = \frac{\beta}{\beta{-}1} \cdot \frac{(\rho{-}\alpha_\pi)(1{-}\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta)}{1{-}\gamma_{\text{пр}}},$$

и $\pi_{\tau_1^*} = p_1^* I_{\tau_1^*} \ge \theta(\rho{-}\alpha_\pi)I_{\tau_1^*}$, если $\theta \le \theta_0$. □

Заметим, что $\theta_0 > 1$, поэтому ограничение Теоремы 2.5 на норматив окупаемости включает и случай обычного срока окупаемости, когда $\theta = 1$. Если ограничение $\theta \le \theta_0$ не выполняется, то, вообще говоря, оптимальный момент инвестирования в задаче (2.40) может уже не быть пороговым, что существенно затрудняет экономическую интерпретацию модели и ее исследование.

Как и выше, из явного вида оптимального порога инвестирования (2.69) можно вывести и явные формулы для ожидаемого NPV $\mathcal{N}_{pb}(\theta)$, ожидаемых приведенных налоговых поступлений от создаваемого предприятия в федеральный ($\mathcal{T}_{pb}^f(\theta)$), региональный ($\mathcal{T}_{pb}^r(\theta)$) и консолидированный ($\mathcal{T}_{pb}(\theta)$) бюджеты (при оптимальном поведении инвестора):

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{pb}(\theta) &= A_0 \frac{1{-}\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta}{\beta} h^{-\beta}, \\
\mathcal{T}_{pb}^f(\theta) &= A_0 \left(\gamma_{\text{пр}}^f h - \frac{\beta-1}{\beta}\Delta\gamma_{\text{пр}}^f \theta\right) h^{-\beta}, \\
\mathcal{T}_{pb}^r(\theta) &= A_0 \left(\gamma_{\text{пр}}^r h - \frac{\beta-1}{\beta}\Delta\gamma_{\text{пр}}^r \theta\right) h^{-\beta}, \\
\mathcal{T}_{pb}(\theta) &= A_0 \left(\gamma_{\text{пр}} h - \frac{\beta-1}{\beta}\Delta\gamma_{\text{пр}} \theta\right) h^{-\beta},
\end{aligned}$$

где $h = (1{-}\Delta\gamma_{\text{пр}}\theta)/(1{-}\gamma_{\text{пр}})$, а A_0 определено в (2.51).

Как и в случае детерминированных налоговых каникул, для оценки потенциальных возможностей рассматриваемого в этом разделе класса каникул, основанных на модифицированном сроке окупаемости, берется оптимизационный подход. Согласно этому подходу государство выбирает такой норматив окупаемости θ^*, который максимизирует ожидаемые приведенные поступления по налогу на прибыль в консолидированный бюджет:

$$\mathcal{T}_{pb}(\theta) \to \max, \tag{2.71}$$

где максимум берется по всем нормативам окупаемости $0 \le \theta \le \theta_0$, а θ_0 определено в Теореме 2.5.

Как и в описанном выше случае детерминированных налоговых каникул, оказалось возможным получить явный вид оптимального норматива окупаемости.

Теорема 2.6. *Оптимальный норматив окупаемости, т.е. решение задачи (2.71), описывается следующей формулой:*

$$\theta^* = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если}}\ \ \beta \le 1/\gamma_{\text{пр}}{-}1, \\ \widehat{\theta}, & \text{\textit{если}}\ \ 0 < \widehat{\theta} < \theta_0, \\ \theta_0, & \text{\textit{если}}\ \ \widehat{\theta} \ge \theta_0, \end{cases} \tag{2.72}$$

где $\widehat{\theta} = \dfrac{\beta\gamma_{\text{пр}} - 1 + \gamma_{\text{пр}}}{\Delta\gamma_{\text{пр}}(\beta - 1 + \gamma_{\text{пр}})}$.

Доказательство этой теоремы нетрудно получить, анализируя производную функции $\mathcal{T}_{pb}(\theta)$ по θ.

2.7. Налоговые каникулы, основанные на текущей прибыли

Еще один принцип назначения налоговых каникул, рассматриваемый в данной работе, связан с достижением текущей прибылью от проекта некоторого заданного уровня. Точнее, в качестве налоговых каникул берется интервал времени, отсчитываемый от момента инвестирования, по окончании которого прибыль предприятия впервые достигнет заданного уровня.

Исследование таких каникул в общем случае весьма затруднительно с точки зрения нахождения оптимального момента инвестирования, поэтому далее ограничимся случаем, когда длительность каникул определяется первым моментом времени, в который отношение текущей прибыли к начальной (в момент инвестирования) превысит заданный уровень, т.е.

$$\nu(z) = \inf\{t \ge 0 :\ \pi^{\tau}_{\tau+t} \ge \pi_\tau z\},$$

где τ — момент инвестирования, $z > 1$ — заданный уровень (если inf не достигается, то полагаем $\nu(z) = \infty$). Отметим, что $\nu(z)$ не является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величиной, а зависит от поведения процесса, описывающего прибыль, после момента инвестирования. Это означает, что в отличие от рассмотренных выше классов данные налоговые каникулы не могут быть заданы априорно в момент инвестирования, а становятся известными только во время функционирования предприятия.

Будем предполагать, что процесс прибыли удовлетворяет, как и выше, условиям (2.42). Тогда для определенной в (2.38) величины $U_\tau(\nu)$ в этом случае получаем

$$\begin{aligned}
U_\tau(\nu(z)) &= \mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu(z)<\infty\}} \int\limits_{\tau+\nu(z)}^{\infty} \pi_t^\tau e^{-\rho(t-\tau)}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu(z)<\infty\}} e^{-\rho\nu(z)} \int\limits_{\tau+\nu(z)}^{\infty} \mathbf{E}\left(\pi_t^\tau \mid \mathcal{F}_{\tau+\nu(z)}\right) e^{-\rho(t-\tau-\nu(z))}\,dt \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu(z)<\infty\}} e^{-\rho\nu(z)} \frac{\pi^\tau_{\tau+\nu(z)}}{\rho-\alpha_\pi} \;\Big|\; \mathcal{F}_\tau\right) = \frac{\pi_\tau z}{\rho-\alpha_\pi}\mathbf{E}\left(\chi_{\{\nu(z)<\infty\}} e^{-\rho\nu(z)} \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \\
&= \frac{\pi_\tau z}{\rho-\alpha_\pi}\left(\frac{\pi_\tau}{\pi_\tau z}\right)^{\beta_\pi} = \frac{\pi_\tau}{\rho-\alpha_\pi} z^{1-\beta_\pi},
\end{aligned} \tag{2.73}$$

где β_π есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma_\pi^2\beta(\beta-1) + \alpha_\pi\beta - \rho = 0$. Заметим, что $\beta_\pi > 1$ при $\rho > \alpha_\pi$.

Обратим внимание, что соотношение (2.73) имеет такой же вид, что и (2.43) для каникул детерминированной длительности $\tilde{\nu} = \dfrac{\beta_\pi - 1}{\rho - \alpha_\pi}\log z$. Это означает, что детерминированные каникулы длительности $\tilde{\nu}$ дают такой же результат (т.е. оптимальный уровень инвестирования, NPV инвестора от реализованного проекта, налоговые выплаты в различные бюджеты), что и каникулы случайной длительности, в течение которых уровень текущей прибыли возрастает в z раз по сравнению с прибылью в момент инвестирования.

Таким образом, механизм назначения налоговых каникул на основе текущей прибыли приносит такой же результат, как и детерминированные каникулы. Поэтому, в частности, из Теоремы 2.4 вытекает, что оптимальное (в смысле максимума налоговых поступлений в консолидированный бюджет) значение уровня отношения прибыли в момент окончания каникул к прибыли в момент инвестирования имеет следующий вид:

$$z^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ \beta < 1/\gamma_{\text{пр}}, \\ \left(\dfrac{\beta\Delta\gamma_{\text{пр}}}{1-\beta\gamma^0_{\text{пр}}}\right)^{1/(\beta_\pi - 1)}, & \text{если} \ \ 1/\gamma_{\text{пр}} \le \beta \le 1/\gamma^0_{\text{пр}}, \\ \infty, & \text{если} \ \ \beta > 1/\gamma^0_{\text{пр}}, \end{cases}$$

где β — положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta(\beta-1)+(\alpha_\pi-\alpha_I)\beta-(\rho-\alpha_I)=0$. Отметим еще, что в приведенной формуле оптимальное значение $z^*=1$ говорит о том, налоговые каникулы (в рамках рассматриваемого здесь механизма) не нужны, т.к. не будут увеличивать ожидаемые приведенные налоги от создаваемого предприятия в консолидированный бюджет, а значение $z^*=\infty$ можно интерпретировать как то, что оптимальным (для консолидированного бюджета) будет введение каникул на весь период функционирования создаваемого предприятия.

2.8. Сравнительный анализ эффективности различных классов налоговых каникул

На основе полученных в предыдущих разделах явных формул для оптимальных налоговых каникул можно провести сравнение эффективности различных классов каникул (детерминированной длительности и основанных на сроке окупаемости).

В качестве сравниваемых показателей будут исследоваться:

- оптимальный уровень инвестирования, определяющий время прихода инвестора;

- ожидаемый оптимальный NPV инвестора;

- ожидаемые оптимальные приведенные налоговые поступления (от создаваемого предприятия) в федеральный и региональный бюджеты.

Для расчетов использовались действующие в РФ ставки налога на прибыль: $\gamma_{\text{пр}} = 20\%$, $\gamma^f_{\text{пр}} = 2\%$, $\gamma^r_{\text{пр}} = 18\%$.

Далее ради краткости будем обозначать:

- $\widetilde{p}_d = p^*_d(\nu^*_d)$, $\widetilde{p}_{pb} = p^*_{pb}(\theta^*)$, $\widetilde{p}_{pb1} = p^*_{pb}(1)$ — оптимальные уровни инвестирования при оптимальных детерминированных каникулах, оптимальном модифицированном сроке окупаемости и обычном сроке окупаемости, соответственно;
- $\widetilde{\mathcal{N}}_d = \mathcal{N}_d(\nu^*_d)$, $\widetilde{\mathcal{N}}_{pb} = \mathcal{N}_{pb}(\theta^*)$, $\widetilde{\mathcal{N}}_{pb1} = \mathcal{N}_{pb}(1)$ — оптимальные NPV инвестора при оптимальных детерминированных каникулах, оптимальном модифицированном сроке окупаемости и обычном сроке окупаемости, соответственно;
- $\widetilde{\mathcal{T}}^f_d = \mathcal{T}^f_d(\nu^*_d)$, $\widetilde{\mathcal{T}}^f_{pb} = \mathcal{T}^f_{pb}(\theta^*)$, $\widetilde{\mathcal{T}}^f_{pb1} = \mathcal{T}^f_{pb}(1)$ — оптимальные приведенные налоговые поступления в федеральный бюджет при оптимальных детерминированных каникулах, оптимальном модифицированном сроке окупаемости и обычном сроке окупаемости, соответственно;
- $\widetilde{\mathcal{T}}^r_d = \mathcal{T}^r_d(\nu^*_d)$, $\widetilde{\mathcal{T}}^r_{pb} = \mathcal{T}^r_{pb}(\theta^*)$, $\widetilde{\mathcal{T}}^r_{pb1} = \mathcal{T}^r_{pb}(1)$ — аналогично для оптимальных приведенных налоговых поступлений в региональный бюджет.

Рассматриваются три типа налоговых освобождений во время каникул, связанных с полным или частичным освобождением от федеральной и/или региональной части налога на прибыль.

Полные налоговые каникулы — предприятие полностью освобождается от уплаты налога на прибыль. Такая ситуация возникает, в частности, для организаций, занимающихся медицинской и образовательной деятельностью, оказанием социальных услуг, резидентов ОЭЗ в Калининградской области. В этом случае $\gamma^0_{\text{пр}} = 0\%$.

Из формул (2.46), (2.62), (2.69), (2.72) вытекает следующее соотношение между оптимальными уровнями инвестирования:

$$\widetilde{p}_{pb1} < \widetilde{p}_{pb} \le \widetilde{p}_d. \tag{2.74}$$

Отметим, что при полных каникулах оптимальный модифицированный срок окупаемости (с нормативом θ^*) оказывается короче, чем простой срок окупаемости (с $\theta = 1$). Поэтому при полных каникулах на срок окупаемости инвестор получает более длительные каникулы и начинает проект раньше (левое неравенство в (2.74)). В то же время инвестор при оптимальных детерминированных каникулах приходит позже, чем при каникулах, основанных на сроке окупаемости (простом и модифицированном). Заметим еще, что равенство $\widetilde{p}_{pb} = \widetilde{p}_d$ может достигаться лишь в случае, когда показатель $\beta \leq (1 - \gamma_{\text{пр}})/\gamma_{\text{пр}}$, т.е. оптимальные налоговые каникулы (как детерминированные, так и по модифицированному сроку окупаемости) равны нулю.

Аналогичная картина имеет место и для оптимального NPV инвестора. Наибольшую прибыль от реализованного проекта (созданного предприятия) инвестор получает при налоговых каникулах на срок окупаемости:

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{pb1} > \widetilde{\mathcal{N}}_{pb}, \quad \widetilde{\mathcal{N}}_{pb1} > \widetilde{\mathcal{N}}_{d}, \tag{2.75}$$

а при $\beta < 40$ (что выполнено для большинства проектов) справедливо еще и неравенство $\widetilde{\mathcal{N}}_{d} < \widetilde{\mathcal{N}}_{pb}$. Тем самым ожидаемый выигрыш инвестора оказывается наибольшим при каникулах на срок окупаемости, а наименьшим - при детерминированных каникулах.

Что касается оптимальных ожидаемых приведенных поступлений в федеральный и региональный бюджеты, они будут наибольшими при использовании каникул, основанных на модифицированном сроке окупаемости:

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{f}_{pb} > \widetilde{\mathcal{T}}^{f}_{pb1}, \quad \widetilde{\mathcal{T}}^{f}_{pb} > \widetilde{\mathcal{T}}^{f}_{d}, \qquad \widetilde{\mathcal{T}}^{r}_{pb} > \widetilde{\mathcal{T}}^{r}_{pb1}, \quad \widetilde{\mathcal{T}}^{r}_{pb} > \widetilde{\mathcal{T}}^{r}_{d},$$

а наименьшими — при каникулах на обычный срок окупаемости (если $\beta \leq 5$) или детерминированных каникулах (если $\beta > 5$).

Региональные налоговые каникулы — предприятие полностью освобождается от уплаты региональной части налога на прибыль. Такие каникулы приняты, например, в некоторых особых экономических зонах, были предложения дать регионам в рамках специальных инвестиционных контрактов право снижать (вплоть до нуля) налог на прибыль. В этом случае принимаем $\gamma^{f0}_{\text{пр}} = 2\%$, $\gamma^{r0}_{\text{пр}} = 0\%$.

Отметим, что при таких региональных каникулах $\theta^* < 1$, если $\beta \leq 33$ (оптимальный модифицированный срок окупаемости оказывается меньше обыкновенного срока окупаемости для большинства проектов).

Результаты сравнения для случая региональных каникул несколько отличаются от результатов для полных каникул.

Соотношения для оптимального уровня инвестирования и оптимального NPV инвестора полностью совпадают с аналогичными для полных каникул (2.74) и (2.75).

Приведенные налоговые поступления в региональный бюджет также будут наибольшими при использовании каникул, основанных на модифицированном сроке окупаемости: $\widetilde{\mathfrak{T}}^r_{pb} \geq \widetilde{\mathfrak{T}}^r_d > \widetilde{\mathfrak{T}}^r_{pb1}$, а наименьшими — при каникулах на обычный срок окупаемости. А вот поступления в федеральный бюджет будут наибольшими при каникулах на обычный срок окупаемости, а наименьшими — при детерминированных каникулах: $\widetilde{\mathfrak{T}}^f_{pb1} > \widetilde{\mathfrak{T}}^f_{pb} > \widetilde{\mathfrak{T}}^f_d$.

Объяснить этот факт можно тем, что, с одной стороны, обычный срок окупаемости оказывается для инвестора более привлекательным, чем оптимальный модифицированный срок окупаемости, и стимулирует его более ранний приход в проект, а с другой стороны, поступления в федеральный бюджет продолжают идти (в отличие от полных каникул) и во время региональных каникул.

Частичные налоговые каникулы — предприятие полностью освобождается от уплаты федеральной части налога на прибыль и имеет пониженную ставку региональной части. Эта ситуация, наверное, наиболее часто встречается в российской практике. В этом случае будем брать $\gamma^{f0}_{\text{пр}} = 0\%$, $\gamma^{r0}_{\text{пр}} = 13.5\%$.

Для таких каникул результаты сравнения различных типов каникул будут более разнообразными, чем в предыдущих случаях.

Отметим, что при частичных освобождениях оптимальные каникулы (как детерминированные, так и по модифицированному сроку окупаемости) могут иметь бесконечную длительность. При этом в федеральный бюджет налоговые поступления не идут, а в региональный продолжают поступать, но по пониженной ставке. Такие бесконечные каникулы возникают, когда показатель β превышает 7.4 (для детерминированных каникул) или 6.5 (для модифицированного срока окупаемости), т.е. для проектов с достаточно маленьким средним темпом роста прибыли.

Заметим также, что если в двух предыдущих случаях (с полными и региональными каникулами) оптимальный модифицированный срок окупаемости всегда был меньше обычного срока окупаемости ($\theta^* < 1$), то при частичных каникулах оптимальный норматив θ^* может быть как меньше, так и больше 1.

Оптимальный уровень инвестирования оказывается самым высоким при детерминированных каникулах, а самым низким — при каникулах на срок окупаемости (если $\beta < 5.5$) или оптимальный модифицированный срок окупаемости (в других случаях). Такая же картина имеет место и для оптимального NPV инвестора:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{N}}_{pb1} > \widetilde{\mathfrak{N}}_{pb} > \widetilde{\mathfrak{N}}_{d} \quad \text{при } \beta < 5.5,\\ \widetilde{\mathfrak{N}}_{pb} > \widetilde{\mathfrak{N}}_{pb1}, \quad \widetilde{\mathfrak{N}}_{pb} > \widetilde{\mathfrak{N}}_{d} \quad \text{при } \beta \geq 5.5.\end{gathered}$$

С точки зрения федерального бюджета оптимальные детерминированные налоговые каникулы будут самыми эффективными при $\beta < 6.5$, а каникулы на обыкновенный срок окупаемости будут наиболее эффективными при $\beta > 6.5$:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{T}}_{d}^{f} > \widetilde{\mathfrak{T}}_{pb}^{f}, \quad \widetilde{\mathfrak{T}}_{d}^{f} > \widetilde{\mathfrak{T}}_{pb1}^{f} \quad \text{при } \beta < 6.5,\\ \widetilde{\mathfrak{T}}_{pb1}^{f} > \widetilde{\mathfrak{T}}_{d}^{f} > \widetilde{\mathfrak{T}}_{pb}^{f} \quad \text{при } \beta \geq 6.5.\end{gathered}$$

Тем самым каникулы на оптимальный модифицированный срок окупаемости не являются эффективным типом каникул для федерального бюджета в случае частичных освобождений.

Наконец, налоговые поступления в региональный бюджет будут примерно одинаковыми для всех типов каникул: $\widetilde{\mathfrak{T}}_{pb1}^{f} \approx \widetilde{\mathfrak{T}}_{d}^{f} \approx \widetilde{\mathfrak{T}}_{pb}^{f}$, так что здесь невозможно выделить наиболее эффективный принцип назначения каникул.

Подведем кратко итог сравнения эффективности для трех видов налоговых освобождений по налогу на прибыль, используемых в российской практике.

В случае *полных* освобождений от налога на прибыль (и в федеральный, и в региональный бюджеты) наиболее эффективными для инвестора являются каникулы на срок окупаемости, а для бюджетов разных уровней (федерального и регионального) — каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости.

Если освобождение от налога на прибыль предоставляет *только регион*, наиболее эффективными для инвестора также будут каникулы на срок окупаемости. Они же будут наиболее эффективными и для федерального бюджета, а для регионального таковыми остаются каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости.

Наконец, в случае *частичных* освобождений от налога на прибыль (нулевая федеральная ставка и пониженная региональная) картина становится более сложной и сравнительная эффективность существенно зависит от среднего темпа роста прибыли создаваемого предприятия и ее волатильности. Можно лишь сказать, что для инвестора *наименее эффективны* каникулы детерминированной длительности, а для федерального бюджета — каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости. В то же время для регионального бюджета все типы каникул дают примерно одинаковый результат.

Глава 3. Налоговые механизмы стимулирования. Амортизационная политика

Как известно, амортизация представляет собой экономический механизм переноса стоимости основных фондов на затраты, связанные с производством и реализацией продукции. Амортизация непосредственно влияет на налоговые базы при расчетах налога на прибыль и налога на имущество предприятий (через остаточную стоимость фондов). Таким образом, увеличение амортизационных отчислений ведет к уменьшению налоговых платежей предприятия и, следовательно, может использоваться в качестве стимула для привлечения инвестиций.

До последнего времени в качестве одного из инструментов привлечения инвестиций в российских регионах использовался механизм ускоренной амортизации активной части основных фондов. При ускоренной амортизации норма амортизации (в рамках линейного метода) могла увеличиваться до 2 раз, а по согласованию с финансовыми органами субъектов РФ и больше. Аналогичные механизмы существуют в налоговых законодательствах многих развитых стран (более подробно см., например, [118]). Как подчеркивают некоторые экономисты, опираясь на мировой опыт, амортизационная политика — это активный стимул экономического роста ([84]). В то же время в России она пока еще не стала эффективным инструментом стимулирования инвестиционной активности, и имеется значительный разброс мнений по поводу сущности амортизационной политики как на макро-, так и на микроуровне [1].

Значительное количество работ посвящено проблеме выбора амортизационной политики и оценке ее влияния на деятельность фирмы. Несмотря на то, что бухгалтерские документы дают четкие правила проведения амортизационной политики, во многих случаях у фирмы остается некоторая свобода в выборе как нормы, так и метода амортизации.

Имеется ряд работ, изучающих проблему минимизации приведенной величины налоговых выплат путем выбора политики амортизации ([155, 110]). Существенное влияние на этот выбор может оказать стохастический характер будущих денежных потоков. В этом плане интересны работы [108, 109], в которых сравниваются приведенные значения будущих налоговых выплат фирмы (по прогрессивной шкале налогообложения) для двух методов амортизации: *равномерного* (равными долями) и *ускоренного* (неравными долями, убывающими по времени). Хотя ускоренная амортизация априори представляется более предпочтительной (в силу эффекта дисконтирования), оптимальный выбор метода амортизации зависит на самом деле от степени неопределенности денежных потоков, величины дисконта, системы налогообложения, а также возможности переноса потерь на другие периоды времени.

Wakeman [169] показал, что в случае единой ставки налога и неотрицательности налогооблагаемой базы во все периоды времени при любой допустимой амортизационной политике, применение ускоренной амортизации является наиболее предпочтительным для налоговых целей фирмы. Данный результат является следствием того факта, что ускоренная амортизация обычно переносит налогооблагаемый доход на более поздний период и в силу временного дисконта более поздняя уплата налогов является предпочтительной. Wilhouwer et al. [171] рассматривали похожую модель с учетом неопределенности будущих денежных потоков и при прогрессивной шкале налогообложения прибыли. При этих условиях оптимальным может быть отказ от применения ускоренной амортизации.

Sansing [157] и Wilhouwer et al. [170] исследовали влияние экономической амортизации и физического износа на инвестиционную активность.

Большинство упомянутых выше работ связывают выбор амортизации с задачей минимизации налоговых платежей уже существующего предприятия. В данной главе проблема выбора амортизационной политики рассматривается в рамках критерия интегрального бюджетного эффекта. В явном виде получена оптимальная амортизационная политика, обеспечивающая максимальные ожидаемые приведенные налоговые поступления от будущего предприятия в бюджет. Оценивается также эффективность оптимальной амортизации для бюджетов разных уровней и для инвестора.[16]

3.1. Оптимальная амортизационная политика

В этом разделе мы найдем явное выражение для оптимальной амортизационной политики в базовой модели инвестора из главы 1, которая обеспечивает максимальные ожидаемые приведенные налоговые поступления от созданного предприятия в региональный бюджет. Поскольку возможность варьирования норм и метода амортизации допускается, как правило, лишь для активной части основных фондов, мы в данном разделе будем отождествлять амортизационную политику исключительно с амортизацией активной части фондов $D = (d_t^a,\ t \geq 0)$. При этом плотность амортизации неактивной части фондов $(d_t^n,\ t \geq 0)$ будет считаться фиксированной.

Пусть $\mathcal{D}$ есть заданный класс допустимых амортизационных политик D. Допустимые классы амортизационных политик могут определяться как выбором различных методов амортизации (линейный, нелинейный), так и рядом дополнительных ограничений. Такие ограничения могут порождаться, например, конкуренцией за потенциального инвестора и задаваться условиями снизу на NPV инвестора от реализованного проекта. Другой тип ограничений может быть связан с обеспечением непрерывного (в среднем) поступления налогов от создаваемого предприятия в региональный бюджет, т.е. чтобы прибыль предприятия была в среднем не меньше некоторого уровня.

Каждой амортизационной политике $D = (d_t^a,\ t \geq 0)$ мы будем ставить в соответствие интеграл от дисконтированной амортизационной плотности

$$A = A(D) = \int\limits_0^\infty d_t^a e^{-(\rho - \theta\alpha_I)t}\, dt. \tag{3.1}$$

Как следует из результатов главы 1, оптимальное поведение инвестора, а также значения показателей, связанных с инвестиционным проектом (при оптимальном поведении инвестора) зависят от амортизации только через величину

---

[16] Результаты данной главы опубликованы в работах [5, 7, 18, 21, 23, 99, 102] с соавторами.

$K = \psi A + (1-\psi)B$, где $B = \int\limits_0^\infty d_t^n e^{-(\rho-\theta\alpha_I)t}\,dt$.

Границы диапазона изменений величины $A(D)$ будем обозначать

$$\underline{A} = \min_{D\in\mathcal{D}} A(D), \quad \bar{A} = \max_{D\in\mathcal{D}} A(D).$$

Предположим, что класс $\mathcal{D}$ допустимых амортизационных политик является достаточно "богатым", в том смысле, что для любого a, $\underline{A} < a < \bar{A}$ существует политика амортизации $D \in \mathcal{D}$, такая что $A(D) = a$. Другими словами, множество $\{a : a = A(D),\ D \in \mathcal{D}\}$ является замкнутым интервалом $[\underline{A}, \bar{A}]$. Это предположение выполняется, например, если класс $\mathcal{D}$ состоит из равномерных или экспоненциальных плотностей (см. (1.6)–(1.7)), а соответствующие нормы амортизации ограничены сверху и снизу. Достаточно естественно также считать, что норма амортизации активных фондов не может быть меньше, чем неактивных, что соответствует условию $\underline{A} > B$.

В качестве критерия оптимальности рассматриваются ожидаемые приведенные налоговые поступления в региональный бюджет $\mathcal{T}^r(D)$, что совпадает и с бюджетным эффектом, поскольку затраты государства (в лице региона) для данного механизма отсутствуют, т.е. решается задача:

$$\mathcal{T}^r(D) \to \max_{D\in\mathcal{D}}. \tag{3.2}$$

Для того, чтобы получить явные формулы для оптимальной амортизационной политики, введем следующие обозначения.

$$u = u(D) = (\gamma_{\text{пр}} + \Gamma)[\psi A(D) + (1{-}\psi)B] - \Gamma, \quad \Gamma{=}\frac{\gamma_{\text{им}}(1{-}\gamma_{\text{пр}})}{\rho{-}\theta\alpha_I}, \tag{3.3}$$

$$Q = \frac{\gamma_{\text{пр}}^r(1-\mu) + (\gamma_{\text{соц}}^r + \gamma_{\text{фл}})\tilde{\mu}}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}, \tag{3.4}$$

$$h_1 = \frac{\gamma_{\text{пр}}^r + \Gamma^r}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma}, \quad h_2 = \frac{\gamma_{\text{пр}}\Gamma^r - \gamma_{\text{пр}}^r\Gamma}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma}, \quad \Gamma^r = \frac{\gamma_{\text{им}}(1-\gamma_{\text{пр}}^r)}{\rho - \theta\alpha_I}, \tag{3.5}$$

$$\underline{u} = (\gamma_{\text{пр}} + \Gamma)[\psi\underline{A} + (1-\psi)B] - \Gamma, \quad \underline{\beta} = \frac{(1-\underline{u})h_1}{Q - (Q+h_1)\underline{u} + h_2}, \tag{3.6}$$

$$\bar{u} = (\gamma_{\text{пр}} + \Gamma)[\psi\bar{A} + (1-\psi)B] - \Gamma, \quad \bar{\beta} = \frac{(1-\bar{u})h_1}{Q - (Q+h_1)\bar{u} + h_2}. \tag{3.7}$$

Зависимость $\mathfrak{T}^r$ от величины дисконтированной амортизации $A = A(D)$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3.1.

1) Если $\beta \le \underline{\beta}$, *то* $\mathfrak{T}^r$ *убывает по* A *на интервале* $(\underline{A}, \bar{A})$.

2) Если $\beta \ge \bar{\beta}$, *то* $\mathfrak{T}^r$ *возрастает по* A *на интервале* $(\underline{A}, \bar{A})$.

3) Если $\underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}$, *то* $\mathfrak{T}^r$ *возрастает по* A *на* $(\underline{A}, A^*)$ *и убывает по* A *на* $(A^*, \bar{A})$, *где*

$$A^* = \left[\frac{u^* + \Gamma}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma} - (1-\psi)B\right]\frac{1}{\psi}, \quad u^* = \frac{\beta Q - h_1 + \beta h_2}{\beta Q + (\beta - 1)h_1}. \tag{3.8}$$

Доказательство.

Согласно Следствию 1.1 выражение для ожидаемых приведенных налоговых поступлений в региональный бюджет может быть записано в виде:

$$\mathfrak{T}^r(D) = I_0 \left(\frac{\pi_0}{I_0\tilde{p}}\right)^{\beta} g(u), \tag{3.9}$$

где $\tilde{p}=\dfrac{\rho-\alpha_\pi}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})}\cdot\dfrac{\beta}{\beta-1}$, $\quad g(u)=(1-u)^{-\beta}[q^r(1-u)-h_1u+h_2]$, $\quad q^r=Q\dfrac{\beta}{\beta-1}$, а остальные входящие в формулу величины определены выше.

Таким образом, задача нахождения оптимальной амортизационной политики (3.2) сводится к более простой задаче максимизации функции на интервале, а именно,

$$g(u) \to \max_{\underline{u} \le u \le \bar{u}}, \tag{3.10}$$

где $g(u) = (1-u)^{-\beta}[q^r(1-u) - h_1u + h_2]$, а $\underline{u}, \bar{u}$ определены в (3.6)–(3.7).

Дифференцируя $g(u)$, имеем:

$$\begin{aligned} g'(u) &= \beta(1-u)^{-\beta-1}[q^r(1-u) - h_1u + h_2] - (1-u)^{-\beta}(q^r + h_1) \\ &= (1-u)^{-\beta-1}G(u), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \text{где}\quad G(u) &= \beta\,[q^r(1-u) - h_1u + h_2] - (1-u)\,(q^r + h_1) \\ &= (\beta-1)q^r(1-u) - \beta h_1 u - (1-u)h_1 + \beta h_2 \\ &= (\beta Q - h_1)(1-u) - \beta h_1 u + \beta h_2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

а Q определено в (3.4).

$G(u)$ является убывающей функцией, поскольку $G'(u){=}-\beta Q{-}(\beta{-}1)h_1{<}0$.

Если $G(\underline{u}) \leq 0$, то $G(u) \leq 0$ при $u > \underline{u}$, и, согласно (3.11) $g(u)$ убывает по u, а тем самым и по A. Из соотношения (3.12) следует, что условие $G(\underline{u}) \leq 0$ равносильно тому, что

$$\beta[Q - (Q + h_1)\underline{u} + h_2] \leq (1 - \underline{u})h_1. \tag{3.13}$$

Поскольку $\underline{u} < \gamma_{\text{пр}}$ и $Q > \dfrac{\gamma^r_{\text{пр}}}{1 - \gamma_{\text{пр}}}$, то

$$Q - (Q + h_1)\underline{u} + h_2 > Q(1 - \gamma_{\text{пр}}) - h_1\gamma_{\text{пр}} + h_2 =$$

$$= Q(1 - \gamma_{\text{пр}}) - \gamma_{\text{пр}}\frac{\gamma^r_{\text{пр}} + \Gamma^r}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma} + \frac{\gamma_{\text{пр}}\Gamma^r - \gamma^r_{\text{пр}}\Gamma}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma} = Q(1 - \gamma_{\text{пр}}) - \gamma^r_{\text{пр}} > 0.$$

Поэтому (3.13) равносильно тому, что $\beta \leq \underline{\beta}$, тем самым доказано утверждение 1) теоремы.

Аналогично можно показать, что неравенство $G(u) > 0$ при $u \leq \bar{u}$ эквивалентно тому, что $\beta \geq \underline{\beta}$, и в этом случае $g(u)$ возрастает по u.

Наконец, если $\underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}$, то $g(u)$ достигает единственного максимума в точке u^*, такой что $G(u^*) = 0$, т.е.

$$u^* = \frac{\beta Q - h_1 + \beta h_2}{\beta Q + (\beta - 1)h_1}. \qquad \square$$

Отметим, что величины $\underline{\beta}$ и $\bar{\beta}$, определяющие условия монотонности приведенных налоговых поступлений по приведенной плотности амортизации, не зависят от характеристик случайного процесса добавленной стоимости π_t.

Приведем теперь соответствующие результаты для применяемых на практике методов амортизации, описанных в разделе 1.3.

Для линейного метода с нормой амортизации λ (см. (1.6)) имеем

$$A = A^{SL}(\lambda) = \frac{\lambda}{\rho - \theta\alpha_I}\left(1 - e^{-(\rho - \theta\alpha_I)/\lambda}\right).$$

Заметим, что $A^{SL}(\lambda)$ возрастает по λ. Предположим, что допустимые нормы амортизации располагаются между границами $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$, т.е. $0 < \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda} < \infty$. Обозначим

$$\underline{A} = A^{SL}(\underline{\lambda}), \quad \bar{A} = A^{SL}(\bar{\lambda}).$$

Следствие 3.1. *Оптимальная норма амортизации* λ^* *для линейного метода при ограничениях* $\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$ *имеет вид:*

$$\lambda^* = \begin{cases} \underline{\lambda}, & \text{если } \beta \le \underline{\beta}, \\ \hat{\lambda}, & \text{если } \underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}, \\ \bar{\lambda}, & \text{если } \beta \ge \bar{\beta}, \end{cases}$$

где $\hat{\lambda}$ *есть корень уравнения* $\psi A^{SL}(\lambda) = \dfrac{u^* + \Gamma}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma} - (1 - \psi)B$, u^* *определено в (3.8), а* $\underline{\beta}$ *и* $\bar{\beta}$ *— в (3.6) и (3.7) соответственно.*

Для нелинейного метода амортизации с нормой η (см. (1.7)) имеем

$$A = A^{DB}(\eta) = \frac{\eta}{\rho - \theta\alpha_I + \eta},$$

и функция $A^{DB}(\eta)$ также будет возрастающей по η. Если на допустимые нормы амортизации в этом случае накладываются ограничения типа $\underline{\eta} \le \eta \le \bar{\eta}$, то аналогично предыдущему случаю положим

$$\underline{A} = A^{DB}(\underline{\eta}), \quad \bar{A} = A^{DB}(\bar{\eta}).$$

Следствие 3.2. *Оптимальная норма амортизации* η^* *для нелинейного метода при ограничениях* $\underline{\eta} \le \eta \le \bar{\eta}$ *имеет следующий вид*

$$\eta^* = \begin{cases} \underline{\eta}, & \text{если } \beta \le \underline{\beta}, \\ (\rho - \theta\alpha_I)A^*/(1 - A^*), & \text{если } \underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}, \\ \bar{\eta}, & \text{если } \beta \ge \bar{\beta}, \end{cases}$$

где A^* *определено в (3.8), а* $\underline{\beta}$ *и* $\bar{\beta}$ *— в (3.6) и (3.7) соответственно.*

Отметим, что совершенно аналогичные результаты можно получить, если вместо задачи максимизации поступлений в региональный бюджет (3.2) рассматривать поступления в федеральный или консолидированный бюджет ($\mathcal{T}^f$ или $\mathcal{T}$ соответственно).

В частности, если вместо $\mathcal{T}^r$ рассматривать ожидаемые налоговые поступления в консолидированный бюджет $\mathcal{T}$, то, как нетрудно увидеть из формул

Следствия 1.1, утверждение Теоремы 3.1 для оптимальной амортизации сохраняют свой вид, если только в соотношениях (3.6)–(3.8) формально положить

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 0, \quad Q = \frac{\gamma_{\text{НДС}} + \gamma_{\text{пр}}(1-\mu) + (\gamma^f_{\text{соц}} + \gamma^r_{\text{соц}} + \gamma_{\text{фл}})\tilde{\mu}}{(1-\mu)(1-\gamma_{\text{пр}})},$$

т.е. в этом случае $u^* = (\beta Q - 1)/(\beta Q + \beta - 1)$.

3.2. Учет ограничений на выбор амортизационной политики

В предыдущем разделе была найдена оптимальная политика амортизации с учетом некоторых заданных (экзогенным образом) ограничений. Однако, существует ряд ограничений на выбор амортизации, проистекающих из самой модели.

Одно из них, которое будет исследовано ниже, касается величины прибыли (точнее, налоговой базы по налогу на прибыль) z^τ_t, определенной в (1.1).

Известно, что наличие отрицательной прибыли в течение достаточно длительного времени является нежелательным явлением как с точки зрения инвестора, так и с точки зрения налоговых властей. Отсутствие пополнений бюджета может отрицательным образом сказаться на инвестиционном климате региона, где реализуется проект.

Для того, чтобы избежать такой ситуации, можно ввести следующее условие *неотрицательности прибыли в среднем* во все моменты времени после инвестирования проекта при оптимальном поведении инвестора:

$$\mathbf{E}(z^{\tau^*}_t \mid \mathcal{F}_{\tau^*}) \geq 0 \text{ (п.н.)} \quad \text{для всех } \ t \geq \tau^*. \tag{3.14}$$

Из определения z^τ_t и предположений базовой модели инвестора, описанных в главе 1, получим, что условие (3.14) равносильно следующему: при всех $t \geq 0$

$$(1-\mu)\pi_{\tau^*}e^{\alpha_\pi t} \geq I_{\tau^*}e^{\theta\alpha_I t}\left\{\psi d^a_t + (1-\psi)d^n_t + \gamma_{\text{им}}[1-\psi\widehat{d^a_t} - (1-\psi)\widehat{d^n_t}]\right\} \quad \text{(п.н.)},$$

где соответствующие обозначения приведены в разделах 1.3, 1.6.1 и 1.6.2.

Используя теорему 1.1, получаем, что условие (3.14) сводится к неравенствам: при всех $t \geq 0$

$$(1-u)\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\gamma_{\text{пр}}}e^{(\alpha_\pi-\theta\alpha_I)t} \geq \psi d_t^a+(1-\psi)d_t^n+\gamma_{\text{им}}[1-\psi\widehat{d_t^a}-(1-\psi)\widehat{d_t^n}], \quad (3.15)$$

где u определено в (3.3).

Неравенства (3.15) налагают определенные ограничения на амортизацию. Рассмотрим эти ограничения более подробно для линейного (1.6) и нелинейного (1.7) методов амортизации.

Введем обозначение $u(K)=(\gamma_{\text{пр}}+\Gamma)K-\Gamma$, где Γ определено в (3.3).

Нелинейный метод. В этом случае $d_t^a=\eta_a e^{-\eta_a t}$, $d_t^n=\eta_n e^{-\eta_n t}$, $\widehat{d_t^a}=1-e^{-\eta_a t}$, $\widehat{d_t^n}=1-e^{-\eta_n t}$. Положим

$$K^{DB}(\eta)=\psi\frac{\eta}{\eta+\rho-\theta\alpha_I}+(1-\psi)\frac{\eta_n}{\eta_n+\rho-\theta\alpha_I}, \quad u^{DB}(\eta)=u(K^{DB}(\eta)).$$

При этом неравенства (3.15) можно записать в виде: при всех $t \geq 0$

$$\begin{aligned}[1-u^{DB}(\eta_a)]\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\gamma_{\text{пр}}}e^{(\alpha_\pi-\theta\alpha_I)t} &\geq \psi(\gamma_{\text{им}}+\eta_a)e^{-\eta_a t}+\\ &+(1-\psi)(\gamma_{\text{им}}+\eta_n)e^{-\eta_n t}. \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Если предположить, что $\min(\eta_a,\eta_n)+\alpha_\pi \geq \theta\alpha_I$, то неравенство (3.16) выполняется для всех $t \geq 0$ в том и только том случае, когда справедливо соотношение:

$$[1-u^{DB}(\eta_a)]\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\gamma_{\text{пр}}} \geq \gamma_{\text{им}}+\psi\eta_a+(1-\psi)\eta_n,$$

которое выполняется при $\eta_a \leq \eta_0$, где η_0 является корнем уравнения

$$[1-u^{DB}(\eta)]\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha_\pi}{1-\gamma_{\text{пр}}}=\gamma_{\text{им}}+\psi\eta+(1-\psi)\eta_n. \qquad (3.17)$$

Таким образом оптимальная норма амортизации для нелинейного метода при условии положительности прибыли в среднем (3.14) равняется $\eta^{**}=\min(\eta^*,\eta_0)$, где η^* определена в следствии 3.2, а η_0 есть корень уравнения (3.17).

Линейный метод. Пусть в этом случае λ_a — норма амортизации активных фондов, λ_n — норма амортизации неактивных фондов. При этом $\widehat{d}_t^a = \min(\lambda_a t, 1)$, $\widehat{d}_t^n = \min(\lambda_n t, 1)$. По аналогии с предыдущим случаем положим

$$K^{SL}(\lambda) = \psi \frac{\lambda}{\rho - \theta\alpha_I}\left(1 - e^{-(\rho-\theta\alpha_I)/\lambda}\right) + (1-\psi)\frac{\lambda_n}{\rho - \theta\alpha_I}\left(1 - e^{-(\rho-\theta\alpha_I)/\lambda_n}\right),$$
$$u^{SL}(\lambda) = u(K^{SL}(\lambda)).$$

Предположим теперь, что $\alpha_\pi \geq \theta\alpha_I$. Тогда левая часть неравенства (3.15) возрастает по t, а правая убывает по t. Поэтому, для справедливости (3.15) при всех $t \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось при $t = 0$, т.е.

$$[1 - u^{SL}(\lambda_a)]\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha_\pi}{1 - \gamma_{\text{пр}}} \geq \gamma_{\text{им}} + \psi\lambda_a + (1 - \psi)\lambda_n.$$

Как и в случае нелинейной амортизации, это неравенство будет справедливо при $\lambda_a \leq \lambda_0$, где λ_0 есть корень уравнения

$$[1 - u^{SL}(\lambda)]\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha_\pi}{1 - \gamma_{\text{пр}}} = \gamma_{\text{им}} + \psi\lambda + (1 - \psi)\lambda_n. \tag{3.18}$$

Заметим, что левая часть уравнения (3.18) убывает по λ, а правая — возрастает.

Итак, при условии неотрицательности прибыли в среднем оптимальная норма амортизации для линейного метода равна $\lambda^{**} = \min(\lambda^*, \lambda_0)$, где λ^* определена в следствии 3.1, а λ_0 есть корень уравнения (3.18).

Отметим в заключение, что вместо условия неотрицательности (3.14) можно рассматривать условие, чтобы прибыль в среднем была бы не меньше некоторого заданного уровня во все моменты времени после инвестирования проекта. При этом верхние оценки λ_0, η_0 оптимальных норм амортизации для линейного и нелинейного метода выводятся совершенно аналогично. Ниже ради краткости мы будем называть величины λ_0 и η_0 верхними ПП-оценками (оценками для положительности прибыли).

3.3. Некоторые свойства оптимальной амортизации и числовые примеры

В этом разделе будут описаны некоторые свойства оптимальной амортизации, вытекающие из полученных выше формул, а также результаты расчетов оптимальной политики амортизации на условно-реальных данных. Приводимые свойства касаются характера влияния на оптимальные нормы амортизации различных параметров инвестиционного проекта. Поскольку оптимальная политика амортизации определяется интегралом от дисконтированной плотности амортизации A, а не конкретным видом этой плотности, будем для определенности рассматривать линейный способ амортизации и соответствующую норму λ^*.

Как показали расчеты, во многих случаях значение оптимальной нормы амортизации оказывается вполне "разумной" величиной и достаточно хорошо согласуется с реальными амортизационными нормами.

Зависимость от параметров добавленной стоимости. Рассматриваемый в базовой модели инвестора из главы 1 процесс, описывающий добавленную стоимость в ходе реализации инвестиционного проекта, характеризуется двумя показателями: средним темпом роста α_π и волатильностью σ_π. При этом, как видно из Следствия 3.1, оптимальная норма амортизации λ^* зависит от этих величин только через показатель β, определенный в (1.29) и входящий в u^*.

Представим u^* в виде:

$$u^* = 1 + (h_2 - h_1)\left(Q + \frac{\beta - 1}{\beta} h_1\right)^{-1}. \tag{3.19}$$

Далее имеем

$$h_2 - h_1 = \frac{\gamma_{\text{пр}}^f \tilde{\gamma}_{\text{им}} - \gamma_{\text{пр}}^r (1 - \tilde{\gamma}_{\text{им}}) - \tilde{\gamma}_{\text{им}}}{\gamma_{\text{пр}}(1 - \tilde{\gamma}_{\text{им}}) + \tilde{\gamma}_{\text{им}}} = \frac{-\gamma_{\text{пр}}^r - \tilde{\gamma}_{\text{им}}(1 - \gamma_{\text{пр}})}{\gamma_{\text{пр}}(1 - \tilde{\gamma}_{\text{им}}) + \tilde{\gamma}_{\text{им}}} < 0. \tag{3.20}$$

Поэтому u^* возрастает по β и, согласно утверждению 1.5, убывает по "полной волатильности" проекта $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_I^2 - 2r\sigma_I\sigma_\pi + \sigma_\pi^2$ и разности $\Delta\alpha = \alpha_\pi - \alpha_I$ средних темпов роста добавленной стоимости и стоимости начальных инвестиций. Теперь из Следствия 3.1 вытекает, что оптимальная норма амортизации

λ^* *убывает* по волатильности проекта $\tilde{\sigma}^2$ и по разности средних темпов роста $\Delta\alpha$.

Зависимости верхней ПП-оценки λ_0 от параметров добавленной стоимости будут разными для волатильности и среднего темпа роста. В самом деле, поскольку величина $\beta/(\beta-1)$ возрастает по $\tilde{\sigma}^2$ (см. Утверждение 1.5), а $1-u^{SL}(\lambda)$ убывает по λ, то корень уравнения (3.18) λ_0 будет *возрастать* по волатильности $\tilde{\sigma}^2$. С другой стороны, из соотношения

$$\frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha_\pi)=\rho-\alpha_I+\tfrac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta$$

и Утверждения 1.5 следует убывание левой части равенства (3.18) по α_π. А поскольку $1-u^{SL}(\lambda)$ убывает по λ, то λ_0 будет *убывать* по среднему темпу роста добавленной стоимости α_π.

Дополним приведенные выше результаты о характере зависимости оптимальной норм амортизации и верхних ПП-оценок (для линейного и нелинейного методов) числовыми расчетами.

Для определенности объем необходимых инвестиций будем считать постоянным во времени (т.е. $\alpha_I=\sigma_I=0$).

Несколько упрощая ситуацию, будем считать экзогенные ограничения на нормы амортизации "вырожденными", т.е. $\underline{\lambda}=\lambda_n$, $\underline{\eta}=\eta_n$ (нормы амортизации для активных фондов должны быть не меньше, чем для неактивных), $\bar{\lambda}=\bar{\eta}=\infty$. Наличие таких ограничений иногда может приводить или к очень маленьким, или к очень большим нормам амортизации. Экономически это не выглядит оправданным, поскольку означает либо почти полное отсутствие амортизации, либо "мгновенную" амортизацию (списывание) фонда. В теоретическом плане такая "вырожденность" оптимальной амортизации означает всего лишь, что зависимость приведенных налоговых поступлений в региональный бюджет от нормы амортизации является монотонной (убывающей, если $\lambda^*=\lambda_n$, или возрастающей, если $\lambda^*=\infty$). А это, в свою очередь, означает, что при наличии каких-либо иных ограничений на норму амортизации региону следует выбирать (в рамках оптимизационного подхода) именно это ограничение.

Всюду в таблицах будем обозначать через λ^* и η^* оптимальные нормы амортизации для линейного и нелинейного метода (из Следствий 3.1 и 3.2 соответственно), а через λ_0 и η_0 — соответствующие верхние ПП-оценки, т.е. корни уравнений (3.18) и (3.17).

Ставки налогов в расчетах полагались следующими:

$$\begin{gathered}\gamma_{\text{пр}} = 20\%, \quad \gamma^r_{\text{пр}} = 17\%, \quad \gamma^f_{\text{пр}} = 3\%, \quad \gamma_{\text{НДС}} = 18\%, \\ \gamma_{\text{им}} = 2.2\%, \quad \gamma_{\text{соц}} = 30\%, \quad \gamma^f_{\text{соц}} = 22\%, \quad \gamma^r_{\text{соц}} = 8\%, \quad \gamma_{\text{фл}} = 13\%.\end{gathered} \tag{3.21}$$

(Здесь мы относим страховые взносы в Пенсионный Фонд к поступлениям в федеральный бюджет, а взносы на обязательное социальное и медицинское страхование — к региональному бюджету.)

В Таблице 3.1 показана зависимость оптимальных норм амортизации линейного и нелинейного методов λ^* и η^*, а также соответствующих верхних ПП-оценок λ_0 и η_0 от среднего темпа изменения добавленной стоимости проекта α_π. При этом волатильность проекта полагается равной $\sigma_\pi = 0.15$, дисконт равен 10%, доля активных фондов в начальных инвестициях $\psi = 0.7$, норма амортизации неактивных фондов берется 5% по нелинейному методу (или примерно 3.6% по линейному методу, чтобы интегралы от дисконтированной амортизационной плотности неактивных фондов по каждому методу были одинаковыми), а зарплатоемкость (доля фонда оплаты труда в добавленной стоимости) $\tilde{\mu}$ составляет 30%.

Таблица 3.1. Зависимость от среднего темпа

α_π	λ^*	λ_0	η^*	η_0
0%	0.35	0.11	0.68	0.11
1%	0.14	0.10	0.26	0.10
2%	0.07	0.10	0.11	0.10
3%	0.03	0.09	0.04	0.09

Как видно из таблицы, оптимальная норма амортизации для проектов с низким средним темпом роста добавленной стоимости α_π достаточно велика и выходит за рамки ограничений, вытекающих из условия (3.14). Когда средний темп роста добавленной стоимости увеличивается, оптимальная норма амортизации уменьшается и начинает удовлетворять ограничению положительности прибыли (3.14).

Отметим еще, что чувствительность оптимальной нормы амортизации по волатильности добавленной стоимости может быть достаточно высокой, и при небольших изменениях волатильности оптимальная норма амортизации может переместиться на границу своих ограничений.

Зависимость от доли активных фондов. Уравнение (3.8) для определения оптимальной нормы амортизации можно записать следующим образом: λ^* есть корень уравнения

$$\psi[A^{SL}(\lambda) - B] = \frac{u^* + \Gamma}{\gamma_{\text{пр}} + \Gamma} - B. \tag{3.22}$$

Поскольку левая часть этого равенства положительна (в силу ограничения $\underline{A} > B$) и возрастает по λ, а правая часть не зависит от амортизации, то нетрудно понять, что оптимальная норма амортизации λ^* как корень уравнения (3.22) будет *убывать* по ψ.

В свою очередь, верхнюю ПП-оценку для линейного метода амортизации λ_0 можно представить как корень уравнения

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma - (\gamma_{\text{пр}} + \Gamma)B - (\gamma_{\text{пр}} + \Gamma)\psi[A^{SL}(\lambda) - B] = \\ = \frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \frac{1 - \gamma_{\text{пр}}}{\rho - \alpha_\pi} \left[\gamma_{\text{им}} + \psi(\lambda - \lambda_n) + \lambda_n\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Левая часть этого уравнения убывает по λ и по ψ (мы считаем, что $\lambda \geq \lambda_n$ и, значит, $A^{SL}(\lambda) \geq B$), а правая часть возрастает по по λ и по ψ. Отсюда легко вывести, что верхняя ПП-оценка λ_0 как корень уравнения (3.23) *убывает* по ψ. Аналогичные рассуждения применимы и для верхней ПП-оценки η_0 для нелинейного метода амортизации.

Следующая таблица иллюстрирует зависимость величин оптимальных норм амортизации линейного и нелинейного метода, а также соответствующих верхних ПП-оценок от доли активных фондов ψ на примере проекта с $\alpha_\pi = 1\%$

и остальными параметрами как и выше (для Таблицы 3.1).

Таблица 3.2. Зависимость от доли активных фондов

ψ	λ^*	λ_0	η^*	η_0
0.9	0.10	0.09	0.17	0.09
0.8	0.12	0.09	0.21	0.10
0.7	0.14	0.10	0.26	0.10
0.6	0.20	0.11	0.36	0.11

Зависимость от зарплатоемкости проекта. Из Теоремы 3.1 видно, что вся зависимость оптимальной амортизации от зарплатоемкости проекта $\tilde{\mu}$ содержится в величине Q, определенной в (3.4), которая возрастает по $\tilde{\mu}$. Далее, из формул (3.19)–(3.20) следует, что величины u^* и A^*, определенные в (3.8), также возрастают по $\tilde{\mu}$.

Теперь, согласно Следствиям 3.1 и 3.2, оптимальные нормы амортизации λ^* и η^* *возрастают* по зарплатоемкости проекта $\tilde{\mu}$.

Что касается верхних ПП-оценок λ_0 и η_0, то они, являясь корнями уравнений (3.18) и (3.17) соответственно, вообще не зависят от величины $\tilde{\mu}$.

В Таблице 3.3 приведены расчеты оптимальных норм амортизации λ^* и η^*, а также верхних ПП-оценок λ_0 и η_0 при различных зарплатоемкостях для проекта с $\alpha_\pi = 2\%$, $\sigma_\pi = 0.12$, $\psi = 0.8$ и остальными параметрами как и выше (для Таблицы 3.1.).

Таблица 3.3. Зависимость от зарплатоемкости

$\tilde{\mu}$	λ^*	λ_0	η^*	η_0
0.2	0.05	0.08	0.08	0.09
0.3	0.10	0.08	0.18	0.09
0.4	0.54	0.08	1.04	0.09
0.5	∞	0.08	∞	0.09

Присутствие символа ∞ в таблице соответствует тому, что при достаточно больших значениях зарплатоемкости оптимальные нормы амортизации выходят на верхнюю границу ограничений, поскольку приведенные налоговые поступления в региональный бюджет $\mathcal{T}^r$ становятся возрастающей функцией от величины дисконтированной амортизации A (и тем самым от нормы амортизации для линейного и нелинейного методов).

Совместное влияние амортизации и налоговых каникул на инвестиционную активность. Как было показано в разделе 2.3.2, одновременное присутствие в модели амортизации и налоговых каникул может приводить к сложным (немонотонным) зависимостям оптимального момента инвестирования τ^* и показателей инвестиционного проекта $\mathcal{N}$, $\mathcal{T}^f$, $\mathcal{T}^r$, $\mathcal{T}$ от длительности налоговых каникул ν.

Совместное использование амортизации и налоговых каникул может приводить к парадоксальным эффектам, когда отдельные механизмы "мешают" друг другу, вызывая в ряде случаев контринтуитивное понижение инвестиционной активности. Для объяснения такого рода эффектов можно отметить, что механизмы налоговых каникул и амортизации носят несколько разнонаправленный характер. Налоговые каникулы снижают эффективную ставку налога на прибыль, в то время как амортизационные отчисления уменьшают налоговую базу по налогу на прибыль. Можно сказать, что во время налоговых каникул льготы по амортизации действуют "вхолостую", т.е. уменьшают налоговую базу по налогу на прибыль, хотя сам этот налог платить не надо. В некоторых странах разрешено переносить амортизацию фондов на период после налоговых каникул (см. [145]), в России такое разрешение на перенос отсутствует.

Для демонстрации указанного эффекта приведем условный численный пример.

Пусть стоимость амортизируемых фондов = 100 и используется линейный метод амортизации на 4 года. Для простоты подсчетов будем считать, что ставка налога на прибыль = 20%, дисконтирование отсутствует, а налоговые каникулы (с нулевой ставкой) составляют 2 года. Динамика прибыли (на 4 года) и налога представлены в следующей таблице.

Год	Прибыль	Амортизация	Налог. база	Налог
1	60	25	35	0
2	55	25	30	0
3	35	25	10	2
4	30	25	5	1
Итого:	180			3

В случае применения ускоренной амортизации (с коэффициентом 2) получаем:

Год	Прибыль	Амортизация	Налог. база	Налог
1	60	50	10	0
2	55	50	5	0
3	35	0	35	7
4	30	0	30	6
Итого:	180			13

Таким образом, суммарный налог после применения ускоренной амортизации увеличился.

В п. 2.3.2 изучалась зависимость упомянутых выше показателей, связанных с инвестиционным проектом, от длительности налоговых каникул при заданной норме амортизации. Ниже будут исследованы аналогичные зависимости от нормы амортизации при фиксированной длительности налоговых каникул.

Остановимся на оптимальном уровне инвестирования p^*, определяющем оптимальный момент прихода инвестора. Рассмотрим модель с нелинейной амортизацией, которая исследовалась в п. 2.3.2. Амортизация в ней описывается экспоненциальной плотностью $\eta e^{-\eta t}$ с нормой η. Согласно формулам (2.22) и (2.27),

$$p^* = \frac{\beta}{\beta-1} \cdot \frac{\rho - \alpha_\pi}{(1-\mu)(1-\widehat{\gamma_{\text{пр}}})} \cdot p(\eta), \tag{3.24}$$

$$\text{где}\ \ p(\eta) = \frac{\tilde{\rho} + (\eta + \gamma_{\text{им}})(1 - \gamma^0_{\text{пр}} - \Delta\gamma_{\text{пр}} e^{-(\tilde{\rho}+\eta)\nu})}{\tilde{\rho} + \eta}, \quad \tilde{\rho} = \rho - \theta\alpha_I. \tag{3.25}$$

Далее имеем

$$p'(\eta) \propto -a e^{(\tilde{\rho}+\eta)\nu} - \Delta\gamma_{\text{пр}}(\tilde{\rho} - \gamma_{\text{им}}) + \Delta\gamma_{\text{пр}}\nu(\eta + \gamma_{\text{им}})(\eta + \tilde{\rho}), \tag{3.26}$$

где $a = \tilde{\rho}\gamma^0_{\text{пр}} + \gamma_{\text{им}}(1 - \gamma^0_{\text{пр}})$.

Очевидно, $p'(\eta) < 0$ при всех достаточно больших η, кроме того

$$\begin{aligned} p'(0) &= -ae^{\tilde{\rho}\nu} - \Delta\gamma_{\text{пр}}(\tilde{\rho} - \gamma_{\text{им}}) + \Delta\gamma_{\text{пр}}\nu\gamma_{\text{им}}\tilde{\rho} < \\ &< -a(1 + \tilde{\rho}\nu) - \Delta\gamma_{\text{пр}}(\tilde{\rho} - \gamma_{\text{им}}) + \Delta\gamma_{\text{пр}}\nu\gamma_{\text{им}}\tilde{\rho} = \\ &= -a - \gamma^0_{\text{пр}}\tilde{\rho}^2\nu - \gamma_{\text{им}}\tilde{\rho}\nu(1 - \gamma_{\text{пр}}) - \Delta\gamma_{\text{пр}}(\tilde{\rho} - \gamma_{\text{им}}) = \\ &= -\gamma_{\text{им}}(1 - \gamma_{\text{пр}}) - \tilde{\rho}\gamma - \tilde{\rho}\nu[\tilde{\rho}\gamma^0_{\text{пр}} + \gamma_{\text{им}}(1 - \gamma_{\text{пр}})] < 0. \end{aligned}$$

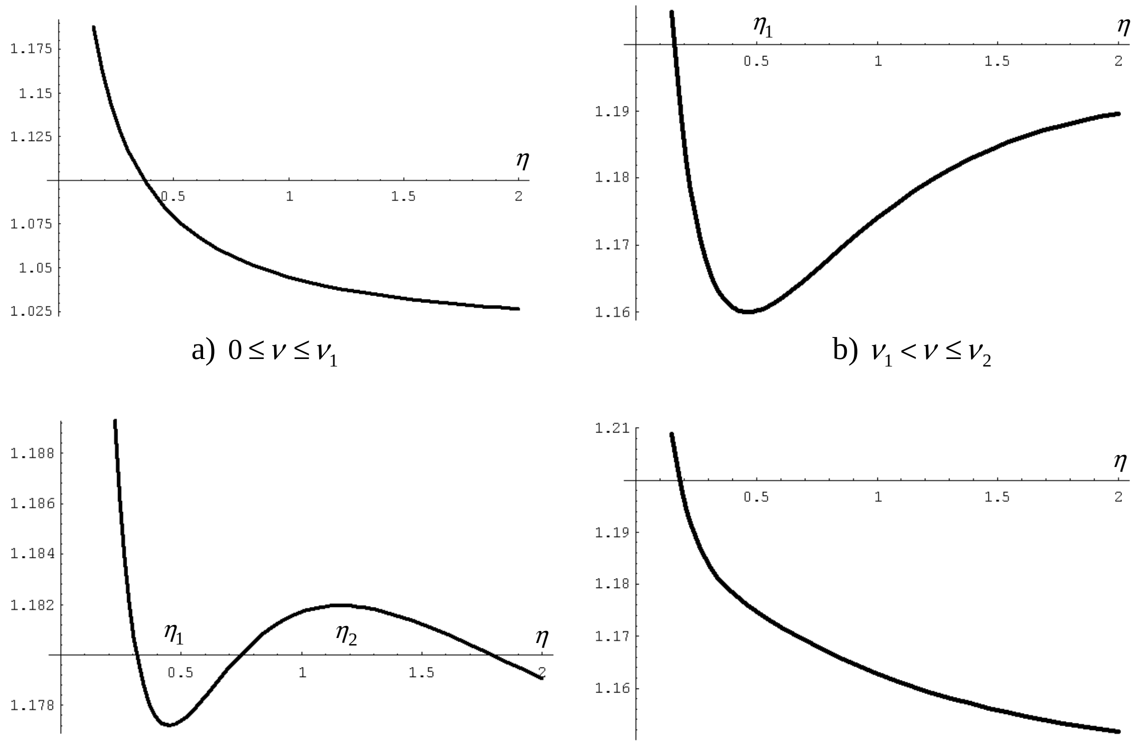
Поэтому, производная $p'(\eta)$ может иметь не более двух нулей. При этом, если $p'(\eta)$ обращается в нуль только один раз, то соответствующая точка является стационарной (но не точкой экстремума). Если же нулей у производной два (η_1 и η_2, где $\eta_1 < \eta_2$), то функция $p(\eta)$ имеет локальный минимум в точке η_1 и локальный максимум в η_2.

Ограничим теперь область рассматриваемых норм амортизации η интервалом (0.15, 2), соответствующем первым семи амортизационным группам для имущества, срок полезного использования которого не превышает 20 лет (см. Таблицу 1.1).

В результате проведенного анализа установлено, что существуют четыре области длительностей налоговых каникул, каждая из которых характеризуется свои типом зависимости оптимального уровня инвестирования (а тем самым и оптимального момента инвестирования) от нормы амортизации. Соответствующие графики этих зависимостей в интервале (0.15, 2) представлены на Рисунке 3.1.

1) "Сверхмалые" налоговые каникулы ($0 < \nu \leq \nu_1$) сопровождаются монотонным убыванием оптимального уровня инвестирования p^* по норме амортизации η — Рисунок 3.1a. Такая зависимость соответствует интуитивным представлениям о том, что увеличение нормы амортизации является стимулирующим фактором для инвестора и ускоряет его приход.

2) В области "малых" налоговых каникул ($\nu_1 < \nu \leq \nu_2$) оптимальный уровень инвестирования p^* сначала убывает при $\eta \leq \eta_1$, а потом возрастает при $\eta_1 \leq \eta < 2$ (Рисунок 3.1b). Тем самым, увеличение нормы амортизации в области $\{\eta \geq \eta_1\}$ ведет к более позднему приходу инвестора. В частности, ускоренная амортизация может приводить к замедлению прихода инвестора



a) $0 \le \nu \le \nu_1$ b) $\nu_1 < \nu \le \nu_2$

c) $\nu_2 < \nu \le \nu_3$ d) $\nu > \nu_3$

Рисунок 3.1. Зависимость p^* от нормы амортизации η при различной длительности налоговых каникул ν

(снижению инвестиционной активности), что совсем не следует из интуитивных соображений.

3) Наиболее сложный вид зависимости возникает в области "средних" налоговых каникул, $\nu_2 < \nu \le \nu_3$. Здесь оптимальный уровень инвестирования имеет два локальных экстремума, и эффект снижения инвестиционной активности (возрастание уровня инвестирования p^*) имеет место в области $\{\eta_1 \le \eta \le \eta_2\}$, определяемой уже двумя критическими значениями нормы амортизации (Рисунок 3.1c).

4) Наконец, при "больших" налоговых каникулах ($\nu > \nu_3$) как и в случае "сверхмалых" каникул имеет место "интуитивно понятная" зависимость, когда оптимальный уровень инвестирования убывает с ростом нормы амортизации, т.е. увеличение нормы амортизации ведет к более раннему приходу инвестора (Рисунок 3.1d).

Графики, представленные на Рисунке 3.1, относятся к случаю региональных налоговых каникул, когда $\gamma_{\text{пр}} = 20\%$, $\gamma_{\text{пр}}^0 = 3\%$, $\gamma_{\text{им}} = 2.2\%$, $\rho = 10\%$. При этом границы описанных выше областей изменения длительностей налоговых каникул равны: $\nu_1 = 0.06$, $\nu_2 = 1.9$, $\nu_3 = 3.15$ (лет). Как показали расчеты по другим (разумным) данным, граница ν_1 остается очень маленькой, что позволяет рассматривать "сверхмалые" каникулы просто как случай отсутствия каникул. Остальные границы также меняются не очень сильно. Поэтому можно говорить, что фактически существуют три диапазона длительностей налоговых каникул, каждый из которых характеризуется своим типом зависимости оптимального момента инвестирования от нормы амортизации:

- малые каникулы (до 2 лет);
- средние каникулы (2–4 года);
- большие каникулы (свыше 4 лет).

Таким образом, увеличение нормы амортизации (ускоренная амортизация) далеко не всегда может оказывать стимулирующее влияние на инвестора при наличии налоговых каникул. При этом наиболее проблемными оказываются налоговые каникулы "средней" длительности в 2–4 года, когда рост нормы амортизации может, вопреки интуитивным ожиданиям, замедлить приход инвестора.

Согласование интересов инвестора и государства с помощью амортизации. Остановимся еще на одном аспекте, связанном с выбором политики амортизации.

Прежде всего отметим, что увеличение нормы амортизации понижает оптимальный уровень инвестирования p^* (см. (1.32)) и, следовательно, ведет к более раннему инвестированию проекта (что вполне соответствует экономической интуиции). Оно также приводит к увеличению ожидаемого NPV инвестора от будущего предприятия (см. Следствие 1.1). В этом смысле увеличение нормы амортизации можно рассматривать как стимул для привлечения инвестиций на создание нового предприятия (более раннего прихода инвестора).

Более сложной выглядит зависимость ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет от нормы амортизации. Согласно Теореме 3.1, тип этой зависимости определяется, по-существу, лишь тремя параметрами инвестиционного проекта: показателем β, зарплатоемкостью $\tilde{\mu}$ и долей активных

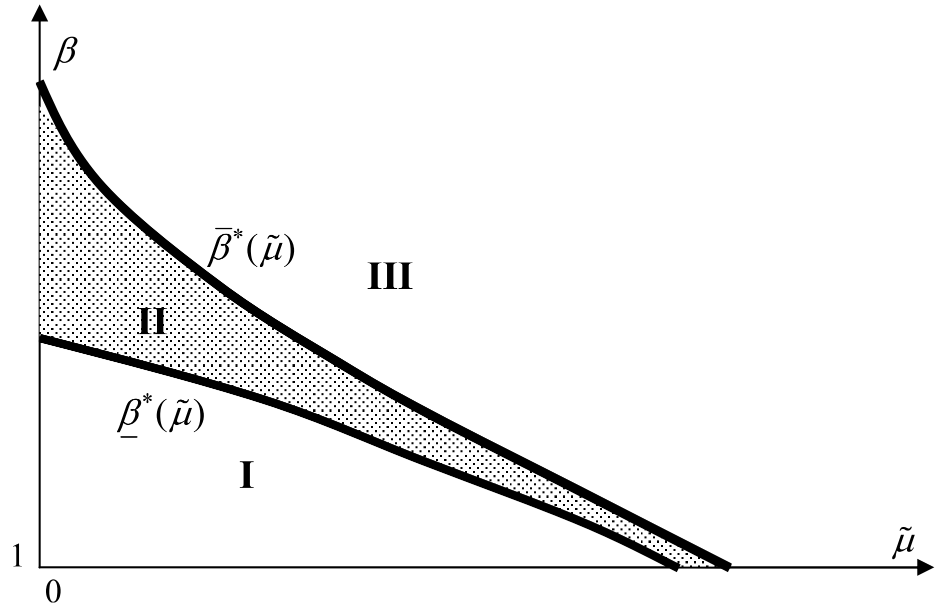


Рисунок 3.2. Области согласования интересов с помощью амортизации

фондов ψ. При этом область допустимых параметров $\{(\psi, \tilde{\mu}, \beta) \, : \, 0 \leq \psi \leq 1, 0 \leq \tilde{\mu} < 1/(1+\gamma_{\text{соц}}), \, \beta > 1\}$ разбивается на три части, границы которых задаются поверхностями $\{(\psi, \tilde{\mu}, \max(\underline{\beta}, 1))\}$ и $\{(\psi, \tilde{\mu}, \max(\bar{\beta}, 1)\}$, где $\underline{\beta}$ и $\bar{\beta}$ (зависящие от ψ, $\tilde{\mu}$) определены в (3.6)–(3.7).

На Рисунке 3.2 изображена проекция этих областей на плоскость $\{(\tilde{\mu}, \beta)\}$ для фиксированной доли активных фондов ψ. При этом в качестве налоговых ставок взяты величины из (3.21), а в качестве ограничений для амортизации — $\underline{A} = B$ (амортизация активных фондов не должна быть меньше, чем неактивных фондов) и $\bar{A} = 1$ (что соответствует вырожденному случаю, когда плотность амортизации можно представить δ-функцией в нуле и происходит "мгновенное" списание фондов). Границы проекций соответствующих областей описываются кривыми $\{\beta = \underline{\beta}^*(\tilde{\mu}) = \max(\underline{\beta}, 1)\}$ и $\{\beta = \bar{\beta}^*(\tilde{\mu}) = \max(\bar{\beta}, 1)\}$. Из (3.6)–(3.7) видно, что функция $\underline{\beta}^*(\tilde{\mu})$ не зависит от ψ (в силу выбора $\underline{A} = B$), а $\bar{\beta}^*(\tilde{\mu})$ возрастает по ψ. Поэтому "промежуточная" область **II** параметров проекта (см. рис. 3.2), для которых оптимальная амортизация лежит строго внутри своих ограничений, будет расширяться с ростом доли активных фондов.

В области **I**, где $\beta \leq \underline{\beta}^*(\tilde{\mu})$, увеличение нормы амортизации наряду с более ранним инвестированием и увеличением NPV инвестора приводит к уменьшению ожидаемых приведенных налоговых поступлений. Поэтому можно говорить, что в области **I** имеет место *рассогласование интересов* инвестора и государства, если под интересами инвестора понимать увеличение его NPV, а под интересами государства (в лице региона) — увеличение ожидаемых налоговых поступлений от создаваемого предприятия в региональный бюджет. Это означает, что любое стимулирование инвестора с помощью политики амортизации, увеличивающее его NPV, одновременно ведет к *уменьшению* ожидаемых налоговых поступлений в бюджет.

Если параметры проекта лежат в области **III** $\{(\tilde{\mu}, \beta) \, : \, \beta \geq \bar{\beta}^*(\tilde{\mu})\}$, то увеличение нормы амортизации вызывает рост ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет. По аналогии с предыдущим случаем можно говорить, что область **III** является областью *полного согласования интересов* инвестора и государства в том смысле, что любое стимулирование инвестора с помощью амортизации, увеличивающее его NPV, одновременно ведет и к *увеличению* ожидаемых налоговых поступлений в бюджет.

Отметим, что инвестиционные проекты, у которых либо показатель зарплатоемкости $\tilde{\mu}$, либо параметр β превышают некоторые критические уровни ($\tilde{\mu}_1$ и β_1 соответственно), всегда попадают в область полного согласования интересов **III**. При этом $\beta_1 = \bar{\beta}\Big|_{\tilde{\mu}=0}$. а μ_1 является решением уравнения $\bar{\beta} = 1$.

Наконец, в области **II** $\{(\tilde{\mu}, \beta) \, : \, \underline{\beta}^*(\tilde{\mu}) < \beta < \bar{\beta}^*(\tilde{\mu})\}$ поведение ожидаемых приведенных налоговых поступлений зависит еще и от величины нормы амортизации. В соответствии с предыдущими определениями эту область можно назвать областью *условного согласования интересов* инвестора и государства, поскольку одновременный рост NPV инвестора и ожидаемых налоговых поступлений в региональный бюджет происходит только при условии, что норма амортизации λ не превышает оптимального значения λ^* (или для общей амортизации A не превышает A^*, определенного в Теореме 3.1). При невыполнении этого условия происходит рассогласование интересов инвестора и государства (в описанном выше смысле).

Отметим, что поскольку параметр β убывает с ростом волатильности, то инвестиционный проект при увеличении волатильности может попасть в область рассогласования интересов **I**. Этот факт можно интерпретировать как то, что рост неопределенности может ограничивать возможности амортизационной политики как средства согласования интересов инвестора и государства. И наоборот, уменьшение неопределенности может сдвинуть параметры проекта в область согласования интересов и расширить возможности по привлечению инвестиций.

3.4. Эффективность оптимальной амортизационной политики для бюджетов и инвестора

В настоящем разделе оценим, какое влияние оптимальная (с региональной точки зрения) амортизационная политика оказывает на ожидаемые налоговые поступления в региональный и федеральный бюджеты, а также на чистый приведенный доход инвестора от реализованного проекта (NPV). В качестве *относительной оценки эффективности* будет рассматриваться отношение соответствующего показателя при оптимальной норме амортизации к тому же показателю при некоторой "эталонной" норме амортизации. Поскольку изучаемые нами показатели зависят не от конкретного вида амортизационной политики D, а лишь от интеграла от дисконтированной плотности амортизации $A(D)$ (см. (3.1)), то для определенности будем в этом разделе рассматривать линейный метод амортизации. За "эталонную" норму амортизации активных фондов будем принимать $\lambda^0 = 20\%$, что соответствует пятилетнему сроку их полезного использования.

Следствие 1.1 дает следующие формулы для ожидаемых приведенных налогов в региональный бюджет $\mathcal{T}^r(\lambda)$, в федеральный бюджет $\mathcal{T}^f(\lambda)$ и NPV инвестора $\mathcal{N}(\lambda)$ как функций от нормы линейной амортизации λ:

$$\mathcal{T}^r(\lambda) = I_0 \left(\frac{\pi_0}{I_0\tilde{p}}\right)^{\beta} (1-u)^{-\beta}[q^r(1-u) - h_1 u + h_2],$$

$$\mathcal{T}^f(\lambda) = I_0 \left(\frac{\pi_0}{I_0\tilde{p}}\right)^{\beta} (1-u)^{-\beta}[q^f(1-u) - (1-h_1)u - h_2],$$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \frac{I_0}{\beta-1} \left(\frac{\pi_0}{I_0\tilde{p}}\right)^{\beta} (1-u)^{-\beta+1},$$

где входящие в эти формулы величины $\tilde{p}, h_1, h_2, q^r, q^f$ определены в (1.36)–(1.38), а $u = u(\lambda) = u^{SL}(\lambda)$ определено в разделе 3.1.1.

Если λ^* обозначает оптимальную норму амортизации, то для оценок сравнительной эффективности имеем представления:

$$\mathcal{E}_*^r = \frac{\mathcal{T}^r(\lambda^*)}{\mathcal{T}^r(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u^*}\right)^{\beta} \frac{q^r(1-u^*) - h_1 u^* + h_2}{q^r(1-u^0) - h_1 u^0 + h_2},$$

$$\mathcal{E}_*^f = \frac{\mathcal{T}^f(\lambda^*)}{\mathcal{T}^f(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u^*}\right)^{\beta} \frac{q^f(1-u^*) - (1-h_1)u^* - h_2}{q^f(1-u^0) - (1-h_1)u^0 - h_2},$$

$$\mathcal{E}_*^N = \frac{\mathcal{N}(\lambda^*)}{\mathcal{N}(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u^*}\right)^{\beta-1},$$

где $u^* = u(\lambda^*)$, а $u^0 = u(\lambda^0)$.

Мы также будем оценивать эффективность удвоенной "эталонной" амортизации $2\lambda^0$, часто используемой на практике. Соответствующими показателями будут

$$\mathcal{E}_2^r = \frac{\mathcal{T}^r(2\lambda^0)}{\mathcal{T}^r(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u_2}\right)^{\beta} \frac{q^r(1-u_2) - h_1 u_2 + h_2}{q^r(1-u^0) - h_1 u^0 + h_2},$$

$$\mathcal{E}_2^f = \frac{\mathcal{T}^f(2\lambda^0)}{\mathcal{T}^f(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u_2}\right)^{\beta} \frac{q^f(1-u_2) - (1-h_1)u_2 - h_2}{q^f(1-u^0) - (1-h_1)u^0 - h_2},$$

$$\mathcal{E}_2^N = \frac{\mathcal{N}(2\lambda^0)}{\mathcal{N}(\lambda^0)} = \left(\frac{1-u^0}{1-u_2}\right)^{\beta-1},$$

где $u_2 = u(2\lambda^0)$.

В отличие от предыдущего раздела провести аналитическое исследование типа зависимости приведенных выше оценок относительной эффективности от параметров модели в общем виде невозможно, поскольку оно существенно зависит от конкретных значений различных параметров. Исключение составляет разве что оценка $\mathcal{E}_2^N$, которая, как нетрудно понять, всегда больше единицы и монотонно возрастает по показателю β, и, тем самым, по Утверждению 1.5 убывает по параметрам добавленной стоимости (среднему темпу роста α_π и волатильности σ_π). Кроме того, $\mathcal{E}_2^N$ не зависит от зарплатоемкости проекта $\tilde{\mu}$.

Перед тем как приводить результаты расчетов описанных выше оценок эффективности, сделаем несколько замечаний.

В качестве дисконта в наших расчетах бралось $\rho = 10\%$, а норма линейной амортизации неактивных фондов полагалась равной $\lambda_n = 3\%$.

При расчетах мы полагали, что в федеральный бюджет поступают налог на добавленную стоимость, федеральная часть налога на прибыль предприятий и часть страховых взносов (идущая в Пенсионный фонд). Другие налоги, а именно, региональная часть налога на прибыль, налог на имущество, подоходный налог с физических лиц и часть страховых взносов (на обязательное социальное и медицинское страхование) зачисляются в региональный бюджет. Соответствующие ставки налогов перечислены в (3.21).

При определении оптимальной нормы линейной амортизации использовалось Следствие 3.1 с ограничениями на норму амортизации: $\underline{\lambda} = \lambda_n, \ \bar{\lambda} = \infty$. Обсуждение таких ограничений приведено в разделе 3.1.2.

Отметим еще, что неравенство $\mathcal{E}_*^N > 1$ соответствует более раннему приходу инвестора в случае оптимальной амортизации по сравнению с эталонной амортизацией, а неравенство $\mathcal{E}_*^N < 1$ — более позднему инвестированию.

В Таблице 3.4 приведены значения введенных выше показателей относительной эффективности для проектов с большой долей активных фондов ($\psi = 0.9$), большим средним темпом изменения добавленной стоимости ($\alpha_\pi = 2\%$) и разными волатильностями σ_π (малой и большой) в зависимости от зарплатоемкости проекта $\tilde{\mu}$ (отношения фонда оплаты труда к величине добавленной стоимости).

Таблица 3.4. Большой темп роста, большая доля активных фондов

$\tilde{\mu}$	$\mathcal{E}^r_*$	$\mathcal{E}^r_2$	$\mathcal{E}^f_*$	$\mathcal{E}^f_2$	$\mathcal{E}^N_*$	$\mathcal{E}^N_2$
			$\alpha_\pi = 2\%, \quad \sigma_\pi = 0.1$			
0.20	1.01	0.98	0.91	1.08	0.90	1.09
0.35	1.03	1.02	1.19	1.08	1.20	1.09
0.50	1.11	1.05	1.20	1.08	1.20	1.09
0.65	1.17	1.07	1.20	1.09	1.20	1.09
			$\alpha_\pi = 2\%, \quad \sigma_\pi = 0.25$			
0.20	1.08	0.97	0.86	1.03	0.85	1.04
0.35	1.00	0.99	0.94	1.03	0.94	1.04
0.50	1.02	1.01	1.08	1.04	1.09	1.04
0.65	1.06	1.03	1.08	1.04	1.09	1.04

В Таблице 3.5 аналогичные результаты даны для инвестиционного проекта с маленьким темпом изменения добавленной стоимости ($\alpha_\pi = 0$). В этом случае рассматривать малые волатильности не имеет особого смысла, поскольку вероятность инвестирования проекта за конечное время мала. Поэтому в таблице приведены расчеты а для достаточно высокой волатильности ($\sigma_\pi = 0.15$).

Таблица 3.5. Малый темп роста, большая доля активных фондов

$\tilde{\mu}$	$\mathcal{E}^r_*$	$\mathcal{E}^r_2$	$\mathcal{E}^f_*$	$\mathcal{E}^f_2$	$\mathcal{E}^N_*$	$\mathcal{E}^N_2$
			$\alpha_\pi = 0\%, \quad \sigma_\pi = 0.25$			
0.20	1.05	0.97	0.82	1.05	0.80	1.05
0.35	1.00	1.00	1.01	1.05	1.01	1.05
0.50	1.05	1.02	1.12	1.05	1.12	1.05
0.65	1.09	1.04	1.12	1.05	1.12	1.05

Приведем теперь значения показателей сравнительной эффективности для проекта со средней оснащенностью активными фондами ($\psi = 0.5$). В отличие от предыдущих таблиц здесь рассмотрены случаи высокого и низкого среднего темпа роста добавленной стоимости, волатильность при этом берется достаточно высокой ($\sigma_\pi = 0.25$).

Таблица 3.6. Средняя доля активных фондов

$\tilde{\mu}$	$\mathcal{E}^r_*$	$\mathcal{E}^r_2$	$\mathcal{E}^f_*$	$\mathcal{E}^f_2$	$\mathcal{E}^N_*$	$\mathcal{E}^N_2$
	$\alpha_\pi = 2\%, \quad \sigma_\pi = 0.25$					
0.20	1.03	0.99	0.92	1.02	0.91	1.02
0.35	1.00	1.00	1.01	1.02	1.01	1.02
0.50	1.02	1.01	1.04	1.02	1.04	1.02
0.65	1.03	1.01	1.04	1.02	1.04	1.02
	$\alpha_\pi = 0\%, \quad \sigma_\pi = 0.25$					
0.20	1.01	0.99	0.90	1.02	0.89	1.03
0.35	1.01	1.00	1.06	1.02	1.06	1.03
0.50	1.03	1.01	1.06	1.03	1.06	1.03
0.65	1.05	1.02	1.06	1.03	1.06	1.03

Полученные расчеты (многие из них опущены) позволяют сделать следующие выводы относительно эффективности оптимальной (с точки зрения регионального бюджета) политики амортизации.

1. Для "технически слабо оснащенных" инвестиционных проектов (с малой долей активных фондов, $\psi \sim 0.2$) оптимальная норма амортизации оказывается высокой. Это означает, что для региона оптимальной оказывается максимально допустимая норма, а в пределе — мгновенное списание фонда. Однако для таких проектов амортизация активных фондов вообще не играет большой роли, так что оптимальная амортизация может принести дополнительных поступлений в региональный бюджет не более 1–2%. Эффективность оптимальной амортизации для федерального бюджета и NPV инвестора при этом оказывается также очень низкой.

2. Технически оснащенные проекты (с долей активных фондов не менее половины от первоначальных инвестиций) дают более сложную картину. При малой величине зарплатоемкости $\tilde{\mu}$ (оплата труда на единицу добавленной стоимости) оптимальная норма амортизации оказывается меньше эталонной. Дополнительный прирост регионального бюджета в этом случае может составить

до 10% (при высокой волатильности), но резко падает при уменьшении волатильности. Федеральный бюджет и инвестор получают при оптимальной норме существенно меньше (на 10–15%), чем при эталонной. В то же время политика удвоенной амортизации оказывается эффективной и может принести в федеральный бюджет и инвестору до 10% прироста. При увеличении доли $\tilde{\mu}$ (примерно до 0.3–0.4) происходит выравнивание оптимальной и эталонной норм. В этой ситуации двойная амортизация оказывается выгодной как федеральному бюджету, так и инвестору и может дать им порядка 10% прироста. При дальнейшем увеличении $\tilde{\mu}$ (свыше 0.5) оптимальная норма амортизации уже превышает эталонную, что приносит дополнительные поступления федеральному бюджету и инвестору. При этом относительная эффективность такой амортизации для федерального бюджета и для инвестора выше, чем для регионального бюджета. Дополнительный выигрыш федерального бюджета и инвестора может составить до 20% (при малых волатильностях), но заметно падает с ростом волатильности.

3. Для проектов со средней степенью оснащенности активными фондами общая картина в целом напоминает предыдущую. Отметим лишь, что в этом случае влияние амортизации на относительную эффективность становится несколько меньше.

Таким образом, оптимальная амортизация способна принести значительный эффект (для федерального бюджета и для инвестора) для инвестиционных проектов, отличающихся:

1) высокой долей активных фондов;
2) умеренной зарплатоемкостью;
3) не очень большой волатильностью.

Для таких проектов оптимальная амортизация обладает и стимулирующим эффектом для инвестора, заставляя его начинать инвестирование раньше. В других случаях эффект от оптимальной нормы амортизации (на уровне федерального бюджета и инвестора) может быть не выражен вообще.

Глава 4. Моделирование государственно-частного партнерства. Оптимизация участия государства

В данной главе базовая модель инвестиционных ожиданий, описанная в главе 1, будет применена для моделирования одного из неналоговых механизмов стимулирования инвестиций — государственно-частного партнерства.[17]

4.1. Особенности государственно-частного партнерства

В настоящее время в развитых и переходных экономиках успешно используются новые формы делового сотрудничества бизнеса и государства в виде государственно-частного партнерства (ГЧП). Термин ГЧП является дословным переводом с английского PPP — public-private partnership. В отечественной экономической литературе можно встретить и другие варианты перевода: частно-государственное партнерство, частно-государственная кооперация, муниципально-частное партнерство, публично-частное партнерство, общественно-частное партнерство [61].

В отечественной литературе ГЧП в широком смысле определяется как институциональный и организационный альянс между государством и бизнесом в целях реализации национальных и международных, масштабных и локальных, но общественно-значимых проектов в широком спектре сфер деятельности: от развития стратегически важных отраслей промышленности и научно-исследовательских конструкторских работ до обеспечения общественных услуг. Как правило, каждый такой альянс является временным, поскольку создается на определенный срок в целях осуществления конкретного проекта и прекращает свое существование после его реализации [39].

Под ГЧП в узком смысле обычно понимается совместное финансирование (либо иное финансовое участие государства) крупномасштабных проектов.

---

[17] Результаты главы опубликованы в [78], а также с соавтором в [17].

Основополагающими принципами ГЧП является совмещение частной инициативы и государственного регулирования как инструмента соблюдения общественных интересов (занятость, налогообложение, социальная сфера), а также распределение рисков между партнерами. За счет ГЧП государство имеет возможность снижать государственные расходы и сроки реализации проектов, изменять формы контроля над производством, передавать некоторые убыточные отрасли (например, ЖКХ) частному бизнесу. Бизнесу ГЧП позволяет расширить доступ к отраслям, считавшимся ранее чисто государственными, получить финансовую поддержку государства на внутреннем и мировом рынках.

В отличие от других форм сотрудничества бизнеса и государства, ГЧП обладает следующими специфическими признаками:

1) заключение соглашения о партнерстве для создания и эксплуатации конкретного объекта на определенный период времени;

2) использование смешанных форм финансирования проектов (частные инвестиции, дополненные государственным финансированием);

3) разделение ответственности между партнерами (государство — общие цели проекта с учетом общественных интересов, частный партнер — оперативная деятельность при разработке и реализации проекта);

4) разделение рисков между участниками проекта в соответствии с заключенными соглашениями [51].

В настоящее время не существует единой общепринятой классификации видов ГЧП. Обычно ГЧП подразделяют на: контракты на управление и обслуживание, аренду и временную передачу прав, концессионные соглашения, акционирование или долевое участие частного капитала в государственных предприятиях (совместные предприятия). Наиболее распространенными являются такие виды ГЧП, как управляющие контракты, аренда и концессионные соглашения. Основные отличия различных видов сводятся к особым условиям передачи частному бизнесу государственного имущества, форм оплаты за его использование, распределения инвестиций и коммерческих рисков, а также длительности сотрудничества. В мировой практике существует более детальная классификация делового взаимодействия частного бизнеса и государства (подробнее см., например, [3]).

Наибольшее развитие ГЧП получило в транспортной (автодороги, железные дороги, аэропорты, порты, трубопроводный транспорт) и социальной инфраструктуре (здравоохранение, образование, развлечение, туризм), жилищно-коммунальном хозяйстве (водоснабжение, электроснабжение, очистка воды, газоснабжение и др.), инновациях (телекоммуникационная инфраструктура), сфере социальных услуг. Лидирующей является транспортная инфраструктура, за ней (с небольшим отрывом) следует социальная сфера [76].

Особенности использования различных видов ГЧП связаны, в основном, с уровнем рыночных отношений и конкретными экономическими потребностями страны. Так, в развитых странах ГЧП направлено, в первую очередь, на укрепление экономических и прочих связей между частным сектором, государством и обществом. В странах с переходной экономикой ГЧП рассматривается, скорее, как фактор экономического роста для привлечения на взаимовыгодной основе национального и иностранного капитала.

ГЧП в России. В России основные положения о государственно-частном партнерстве были сформулированы в "Программе социально-экономического развития Российской Федерации на среднесрочную перспективу (2005–2008 гг.)". Такая форма взаимодействия государства и бизнеса рассматривается как эффективный институт формирования экономической политики, роста инновационной активности, инфраструктурного развития.

Основными инструментами реализации ГЧП в России считается:

– создание и функционирование особых экономических зон (ОЭЗ);

– использование Инвестиционного Фонда РФ[18];

– реализация механизмов концессии, предусмотренных Федеральным Законом №115-ФЗ от 21 июля 2005 г. "О концессионных соглашениях";

– формирование институтов развития, в том числе банков развития, венчурных инновационных фондов и т.п.

Создавались условий для использования механизмов ГЧП. Так, для кон-

---

[18] Фонд прекратил свое существование в 2017 году, вместо него остались региональные фонды

цессионных соглашений были приняты базовые нормативные правовые акты, проведены первые конкурсы на право заключения концессионного соглашения. Созданы первые ОЭЗ: 2 — промышленно-производственного типа (Елабуга, Липецк), 4 — технико-внедренческого типа (Дубна, Санкт-Петербург, Томск, Зеленоград), 7 — туристско-рекреационных (Республика Алтай, Алтайский край, Иркутская область, Бурятия – 2, Краснодарский край, Кавказские Минеральные Воды), планировалось создать 3 портовые зоны (Ульяновская область, Хабаровский край, Красноярский край). Кроме того, еще две ОЭЗ (Калининградская и Магаданская области), обладающие особым статусом, были сформированы еще в конце 1990-х годов.

По данным Международного Центра социально-экономических исследований "Леонтьевский центр" большая часть реализующихся в настоящее время или уже реализованных проектов ГЧП относятся к сфере ЖКХ, благоустройства, инженерной структуры. Большинство из них осуществляется в форме контрактов на обслуживание, затем идут договоры аренды, далее — контракты на строительство, эксплуатацию и передачу. Одним из наиболее успешных проектов ГЧП в России считается проект по завершению строительства Юго-Западных очистных сооружений (ЮЗОС) в Санкт-Петербурге, привлекший к финансированию и участию западных партнеров и признанный одним из важнейших международных проектов по защите Балтийского моря [46, с. 36–37].

Одним из основных каналов для реализации инвестиционных проектов, стратегически значимых для государства и осуществляемых на условиях государственно-частного партнерства, являлся Инвестиционный Фонд РФ, сформированный в конце 2005 г. Предполагалось, что государство будет финансировать бизнес-проекты, сметная стоимость которых составляет не менее 5 млрд рублей при условии не менее 25%-ного участия частного инвестора, связанные с развитием инфраструктуры, элементов инновационной системы, реализацией институциональных преобразований, разработкой проектной документации.

Господдержка инвестиционных проектов осуществляется в течение пяти лет в виде:

софинансирования проекта на договорных условиях,

участия в акционерном капитале компаний,

предоставления государственных гарантий под инвестиционные проекты.

С июня 2008 г. Инвестиционный Фонд начал также выделять средства и на реализацию региональных и межрегиональных проектов (при финансировании частным инвестором не менее 50% сметной стоимости проекта). При этом была существенно снижена (до 500 млн руб.) минимальная сметная стоимость региональных проектов, скорректирована методика расчета показателей и критериев эффективности региональных проектов, претендующих на получение средств Инвестиционного Фонда РФ.

Отбор инвестиционных проектов на предоставление государственной поддержки за счет Инвестиционного Фонда проводился Минрегионом РФ в рамках многоэтапного конкурса на основе ряда качественных и количественных критериев. Качественные критерии отбора включали в себя: соответствие приоритетным программам развития на среднесрочную перспективу; наличие частного партнера; невозможность реализации проекта без государственной поддержки; наличие положительных социальных эффектов. Инвестиционные проекты, соответствующие качественным критериям, подлежали дальнейшему отбору уже по количественным критериям, основанных на показателях финансовой эффективности (NPV, внутренняя норма доходности), бюджетной эффективности (отношение дисконтированных налоговых поступлений к суммарному объему государственной поддержки) и экономической эффективности (вклад инвестиционного проекта в увеличение ВВП или валового регионального продукта).

К 2010 году было утверждено 20 инвестиционных проектов, имеющих общегосударственное значение, для реализации которых представлялась господдержка из средств Инвестиционного Фонда, в объеме более 320 млрд руб., а также 23 региональных инвестиционных проектов, на реализацию которых из средств Фонда выделялось около 13 млрд руб. Что касается эффективности этих проектов, то по оценкам Минрегиона на 1 рубль средств из федерального бюджета рассчитывали привлекать в среднем более 2.1 рублей частных инвесторов.

Следует, однако, сказать, что Правительством РФ отмечалась целесообразность ревизии одобренных проектов Инвестиционного фонда на предмет их актуальности в текущих условиях, поскольку в условиях кризиса часть инвесторов может отказаться от финансирования проектов. В дальнейшем (в 2017 году) Инвестиционный Фонд был упразднен.

4.2. Обзор работ по моделям ГЧП

Проекты ГЧП вызывают большие проблемы при планировании, реализации и функционировании в силу сложных структурных зависимостей, существования разных интересов между участвующими сторонами и неопределенностей. Для обоснования и реализации ГЧП-проект должен, прежде всего, показать свою экономическую и финансовую состоятельность. Традиционные методы оценивания, типа критериев "инвестировать сейчас или никогда" для дисконтированных денежных потоков (NPV) или внутренней нормы доходности (IRR), приводят к неадекватным результатам, поскольку не могут учесть многие специфические черты ГЧП-проектов (в частности, большую неопределенность, различные риски, государственные гарантии, возможность принятия гибких решений в результате переговоров и т.п.). Кроме того, в условиях неопределенности будущих денежных потоков во многих случаях существует возможность отложить инвестирование для того, чтобы получить новую информацию и заново оценить эффективность. Такое откладывание инвестиций может оказаться целесообразным даже при положительной величине чистого приведенного дохода (NPV) от проекта.

Одним из альтернативных методов оценивания проектов являются метод реальных опционов. Использование этого метода позволяет учесть гибкость управленческих решений, в частности, касающихся выбора моментов начала инвестирования и прекращения проекта, длительности периода концессии и др., особенно на поздних стадиях реализации проектов, когда могут возникать непредсказуемые события.

Уже появилось достаточно много работ, посвященных использованию метода реальных опционов для оценивания крупных инфраструктурных проектов и концессионных соглашений. В частности, в [129] была предложена общая модель описания концессионного соглашения по схеме BTO (Build-Transfer-Operate), которая учитывает неопределенность денежных потоков от проекта и строительных затрат, риск банкротства, систему государственных гарантий.

Возможности опциона откладывания, а также опциона длительности периода концессии для проектов платных дорог и другой инфраструктуры были продемонстрированы в [124, 131, 156]. В [148] для гипотетического проекта платной дороги было проведено сравнение традиционного NPV метода и трех реальных опционов для оценки эффективности проекта. Показано, что использование реальных опционов позволяет действительно улучшить оценку проекта. Хотя многие недостатки традиционного оценивания по NPV переносятся и на реальные опционы (например, точность прогнозирования денежных потоков), основное преимущество реально-опционного анализа состоит в более четком понимании процесса принятия решений, который имеет место для ГЧП-проектов.

Проект автоматизированных платных дорог Melbourne CityLink в рамках теории реальных опционов изучался в [94]. Показано, как с помощью опционов можно оценить условия соглашения между общественным и частным секторами, касающиеся системы гарантий и распределения рисков. В качестве базовых опционов при этом рассматривались опцион откладывания концессионером своих платежей и опцион государства отмены концессии. Исследовалось, как эти опционы влияют на стимулирование инвестиций и распределение получаемых доходов между общественным и частным секторами.

Опционы для оценивания проектов развития аэропорта изучались в [160] на основе комбинации теории реальных опционов и теории игр. Описание широкого круга реальных опционов, связанных с инвестированием в создание аэропорта представлено в [126]. Авторы [153] моделировали процесс инвестирования строительства аэропорта в ситуации, когда доходы и количество пассажиров аэропорта ведут себя стохастическим образом.

Различные субсидии, гарантии и другие стимулы в инфраструктурных проектах, реализуемых на принципах ГЧП, улучшающие оценку их эффективности, изучались, например, в [113, 114] (гарантии минимального спроса), [142] (гарантии по кредитам).

Работа [106] исследует стимулы, которые может предоставить правительство для немедленного инвестирования строительства аэропорта. Они должны компенсировать частной компании потерю возможности отложить реализацию проекта (опцион откладывания), приводя к оптимальному решению инвестировать немедленно. В качестве таких стимулов рассматриваются субсидии на начальные инвестиции, доплаты на доход от каждого пассажира, гарантированное число пассажиров. Проведен сравнительный анализ этих стимулов с различных точек зрения, изучено их влияние на эффективность проекта.

Одной из основных проблем, возникающих при разработке механизма реализации ГЧП в конкретных проектах, состоит в определении "оптимальной" (с той или иной точки зрения) степени участия государства в этих проектах. В большинстве из упомянутых выше работ такая проблема не ставится, однако проводится сравнительный анализ различных вариантов реализации механизма партнерства (среди небольшого числа альтернатив).

Отметим еще работу [31], в которой изучается детерминированная модель реализации инвестиционного проекта по концессионной схеме BTO. Совместное финансирование в ней со стороны государства и частного инвестора происходит в каждый (дискретный) момент времени, и авторы рассматривают задачу определения оптимальной доли участия инвестора в общем объеме инвестиций, исходя из принципа максимизации NPV инвестора.

В настоящей главе в рамках изложенной выше теории инвестиционных ожиданий развивается математическая модель, которая позволяет исследовать потенциальные возможности государственной поддержки инвестиционных проектов в рамках ГЧП. На основе этой модели предлагается оптимизационный (с точки зрения бюджетного эффекта) подход к определению степени участия государства в совместном финансировании проектов, реализуемых с помощью механизма государственно-частного партнерства, и проводится анализ влияния различных параметров модели на оптимальную долю государственного софинансирования проектов.

4.3. Описание модели

Излагаемая ниже модель является адаптацией базовой модели инвестиционных ожиданий (с агрегированными налогами — см. раздел 1.10) к схеме государственно-частного партнерства.

Основным объектом модели является некоторый инвестиционный проект, например, проект создания нового производственного предприятия.

Поток прибыли реализованного инвестиционного проекта (до уплаты налогов) моделируется с помощью случайного процесса $(\pi_t,\ t \geq 0)$, заданного на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ (\mathcal{F}_t,\ t \geq 0),\ P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$. Как обычно, $\mathcal{F}_t$ может интерпретироваться как наблюдаемая информация о системе до момента времени t, а π_t считается согласованным с $\mathcal{F}_t$. Время жизни проекта (после начала реализации) предполагается бесконечным.

Процесс реализации инвестиционного проекта предполагается двухэтапным. На первом этапе создается инфраструктура, финансирование которой (в объеме J) полностью берет на себя государство. Такие обязательства со стороны государства установлены, в частности, Законом об особых экономических зонах в РФ. При этом надо иметь в виду, что инфраструктура часто создается сразу для нескольких проектов, и возникает проблема распределения общих инфраструктурных затрат между участниками отдельных проектов. Такая задача требует отдельного рассмотрения и лежит вне рамок данной работы. Определенным подходом к ее решению может служить применяемая в некоторых странах схема возвратного налогового финансирования, которая предусматривает возврат инвестору инфраструктурных затрат (или их части) из налогов, полученных в результате реализации проекта.

Формирование инфраструктуры занимает определенный промежуток времени l (инфраструктурный лаг), по окончании которого делаются инвестиции объема I для реализации собственно проекта (см. Рисунок 4.1).

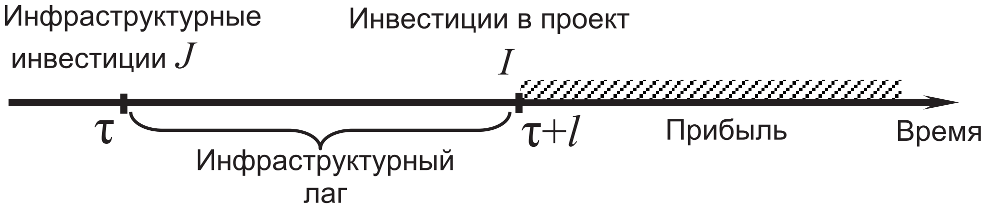


Рисунок 4.1. Общая схема инвестиционного проекта

В этих инвестициях участвуют как государство, так и частный инвестор, а соответствующие "доли участия" (θ для государства, $1-\theta$ для инвестора) устанавливаются на договорной основе. Для простоты полагаем, что инвестиции в собственно проект являются мгновенными и необратимыми, т.е. начинают приносить прибыль сразу после вложения и не могут быть изъяты из проекта после начала его реализации. Предполагается также, что объемы инвестиций в инфраструктуру и собственно в проект не зависят от момента инвестирования. Налоговая система представлена в модели одним агрегированным налогом γ (коэффициентом общей налоговой нагрузки на прибыль от реализованного проекта), который есть доля прибыли, идущая на уплату всех налогов.

Пусть τ есть момент начала реализации проекта, т.е. момент инвестирования в создание необходимой инфраструктуры.

Ожидаемый чистый дисконтированный доход (после уплаты налогов) от эксплуатации проекта, приведенный к моменту инвестирования τ, определяется выражением

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau+l}^{\infty}(1-\gamma)\pi_t e^{-\rho(t-\tau)}dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right), \tag{4.1}$$

где ρ — ставка дисконта.

Выбор момента инвестирования. Вариант задачи инвестора (1.13) для рассматриваемой здесь схемы ГЧП состоит в выборе момента начала реализации проекта τ (момента вложений в инфраструктуру) таким образом, чтобы NPV от реализованного проекта был максимальным:

$$\mathbf{E}[V_\tau-(1-\theta)Ie^{-\rho l}]e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}}\to\max_{\tau}, \tag{4.2}$$

где максимум берется по всем марковским моментам $\tau \geq 0$ (относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$).

Оптимальный момент инвестирования τ^* (решение задачи (4.2)) зависит от доли θ — степени участия государства в начальных инвестициях: $\tau^* = \tau^*(\theta)$.

Математические предположения. Будем считать, что поток прибыли от проекта π_t описывается процессом геометрического броуновского движения с темпом роста α_π и волатильностью $\sigma_\pi > 0$:

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha_\pi dt + \sigma_\pi dw_t), \quad \text{где } \ w_t \text{ — винеровский процесс}$$

(далее в этой главе мы ради краткости будем обозначать параметры процесса прибыли просто как α и σ).

Нетрудно подсчитать, что при сделанном выше предположении на процесс прибыли, ожидаемый чистый дисконтированный доход от эксплуатации проекта (4.1) равен

$$V_\tau = \frac{1-\gamma}{\rho-\alpha}\pi_\tau e^{-(\rho-\alpha)l}. \tag{4.3}$$

Оптимальный момент инвестирования. Оптимальное поведение инвестора в предложенной модели задается некоторым уровнем (порогом). Более того, можно указать явную зависимость этого оптимального порога от объема инвестиций (в собственно проект) I, доли государственного участия в них θ, длительности инфраструктурного лага l, показателя общей налоговой нагрузки на прибыль γ, величины дисконта ρ, характеристик роста и разброса прибыли (α и σ).

Теорема 4.1. *Если $\alpha < \rho$, то оптимальный момент инвестирования в задаче (4.2) равен*

$$\tau^* = \min\{t \geq 0: \ \pi_t \geq \pi^*\}, \quad \textit{где} \ \ \pi^* = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha}{1-\gamma}(1-\theta)e^{-\alpha l}I, \tag{4.4}$$

а β есть положительный корень уравнения

$$0.5\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Как видно из формулы (4.3), функционал в задаче (4.2) представляет собой дисконтированную разность процесса геометрического броуновского движения и постоянной величины. Поскольку оптимальный момент инвестирования является оптимальным моментом остановки в задаче (4.2), то для доказательства теоремы достаточно теперь воспользоваться Утверждением 1.4. □

Обозначим $b = \dfrac{\pi_0(1-\gamma)(\beta-1)}{I(\rho-\alpha)\beta}e^{\alpha l}$.

Как нетрудно видеть из (4.4), при $\theta \geq 1-b$ имеем $\pi_0 \geq \pi^*$ и, следовательно, оптимальный момент $\tau^* = 0$. Поэтому будем предполагать, что $b < 1$, иначе оптимальный момент инвестирования всегда будет нулевым.

4.4. Оптимизация доли государственного софинансирования

4.4.1. Задача оптимизации

Размер государственной поддержки определяет, как уже упоминалось, оптимальный момент начала реализации инвестиционного проекта (создание инфраструктуры) τ^* и, вместе с ним, ожидаемые дисконтированные налоговые поступления от реализованного проекта в бюджет.

В качестве критерия для сравнения различных вариантов государственной поддержки реализации инвестиционного проекта рассматривается бюджетный эффект, который в данной модели представляет собой разность между дисконтированными налоговыми поступлениями от реализованного проекта в бюджет и общим объемом государственной поддержки (включая затраты на создание необходимой инфраструктуры и участие в софинансировании самого проекта). В рамках описанной выше модели бюджетный эффект от проекта (при оптимальном поведении инвестора) равен

$$B(\theta) = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau^*+l}^{\infty} \gamma\pi_t e^{-\rho(t-\tau^*)}dt - J - \theta I e^{-\rho l}\right)e^{-\rho\tau^*}. \tag{4.6}$$

Доля софинансирования θ является в данной схеме ГЧП параметром механизма стимулирования. Поэтому в соответствии с общим оптимизационным подходом, изложенным в главе 2, для оценки потенциальных возможностей софинансирования государством инвестиционного проекта предлагается выбирать долю софинансирования таким образом, чтобы соответствующий бюджетный эффект был максимальным:

$$B(\theta) \to \max_{\theta_1 \le \theta \le \theta_2}, \tag{4.7}$$

где максимум берется по всем долям θ из заданного допустимого множества $\{\theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$.

Ограничения на долю государственного финансирования возникают, например, когда государственная поддержка реализации инвестиционного проекта осуществляется через Инвестиционный фонд РФ. В этом случае частный инвестор должен вложить не менее 25% сметной стоимости инвестиционного проекта.

Заметим, что если в качестве показателя бюджетного эффекта рассматривать величину типа отношения дисконтированных налоговых поступлений к общему объему господдержки[19] $B(\theta)/(J + \theta I e^{-\rho l})$ ("индекс бюджетной эффективности"), то задача оценки и оптимизации госучастия для такого индекса теряет смысл. Так, например, если инфраструктурных затрат нет и нижняя граница $\theta_1 = 0$, то $B(\theta)/\theta$ неограниченно возрастает при $\theta \to 0$.

Используя Теорему 4.1, можно выписать явную формулу для бюджетного эффекта (4.6).

При $\theta \ge 1 - b$, как уже говорилось выше, $\tau^* = 0$, поэтому имеем:

$$B(\theta) = \gamma \frac{\pi_0}{\rho - \alpha} e^{-(\rho-\alpha)l} - J - \theta I e^{-\rho l} = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{\beta}{\beta - 1} b - \psi - \theta \right) I e^{-\rho l},$$

где $\psi = J/(I e^{-\rho l})$ — отношение инвестиций в инфраструктуру к инвестициям в собственно проект, приведенным к моменту вложений в инфраструктуру (относительные инфраструктурные затраты).

---

[19] Показатель такого типа присутствует в существующей "Методике расчета показателей и применения критериев эффективности региональных инвестиционных проектов, претендующих на получение государственной поддержки за счет бюджетных ассигнований Инвестиционного фонда Российской Федерации"

При $\theta < 1 - b$ имеем $\mathbf{E}e^{-\rho\tau^*} = (\pi_0/\pi^*)^\beta$. Отсюда и из Теоремы 4.1 окончательно получаем

$$B(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \dfrac{\beta}{\beta-1} b - \psi - \theta\right) e^{-\rho l} I, & \text{при} \quad \theta \geq 1-b, \\ \left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \dfrac{\beta}{\beta-1}(1-\theta) - \psi - \theta\right)(1-\theta)^{-\beta} b^\beta e^{-\rho l} I, & \text{при} \quad \theta < 1-b. \end{cases} \tag{4.8}$$

Если нижняя граница ограничений на долю софинансирования θ_1 достаточно велика ($\theta_1 \geq 1-b$), то при всех $\theta \geq \theta_1$ оптимальный момент инвестирования τ^* равен нулю. При этом, как видно из (4.8), бюджетный эффект убывает по θ и, следовательно, оптимальная доля софинансирования со стороны государства θ^* совпадает с нижней допустимой границей θ_1. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\theta_1 < 1-b$, что позволит избежать «вырожденных» ситуаций.

4.4.2. Оптимальная доля софинансирования

Теперь можно полностью характеризовать решение задачи (4.7) — оптимальную долю участия государства в финансировании инвестиционного проекта.

Для описания структуры решения нам будет удобно ввести функцию $g(\theta) = [\gamma - \theta - (1-\gamma)\psi]/(1-\theta)$ для $0 \leq \theta < 1$.

Теорема 4.2. *Оптимальная доля государственного софинансирования при ограничениях* $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ *равна*

$$\theta^* = \begin{cases} \theta_1, & \text{при} \quad \beta g(\theta_1) \leq 1-\gamma, \\ \gamma - \dfrac{(1-\gamma)(1-\gamma+\beta\psi)}{\beta+\gamma-1}, & \text{при} \quad \beta g(\bar\theta) < 1-\gamma < \beta g(\theta_1), \\ \bar\theta, & \text{при} \quad \beta g(\bar\theta) \geq 1-\gamma, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $\bar\theta = \min\{\theta_2, 1-b\}$.

Доказательство. Обозначим $f(\theta) = [c(1-\theta) - \psi - \theta](1-\theta)^{-\beta}$, где $c = \dfrac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \dfrac{\beta}{\beta-1}$.

Как нетрудно подсчитать, $f'(\theta) = \dfrac{\beta-1}{(1-\theta)^{\beta+1}}\left(c - \dfrac{\beta\psi+1}{\beta-1} - \theta(c+1)\right)$, таким образом, знак $f'(\theta)$ совпадает со знаком функции $c - \dfrac{\beta\psi+1}{\beta-1} - \theta(c+1)$, которая убывает по θ.

Если $f'(\theta_1) \le 0$, то $f'(\theta) \le 0$ при $\theta \ge \theta_1$, т.е. функция $f(\theta)$ убывает при $\theta \ge \theta_1$ и, в силу формулы (4.8), бюджетный эффект убывает по θ. Поэтому оптимальная доля софинансирования совпадает с нижней границей ограничений θ_1, при этом условие $f'(\theta_1) \le 0$, как нетрудно убедиться, равносильно тому, что $\beta g(\theta_1) \le 1 - \gamma$.

Если $f'(\bar{\theta}) \ge 0$, т.е. $\beta g(\bar{\theta}) \ge 1 - \gamma$, то $f'(\theta) \ge 0$ при $\theta \le \bar{\theta}$, поэтому $B(\theta)$ возрастает по θ при $\theta \le \bar{\theta}$ и убывает при $\bar{\theta} \le \theta \le \theta_2$. Таким образом, в этом случае оптимальная доля $\theta^* = \bar{\theta}$.

Наконец, если $\beta g(\bar{\theta}) < 1 - \gamma < \beta g(\theta_1)$, то $f'(\theta_1) > 0$, $f'(\bar{\theta}) < 0$ и максимум бюджетного эффекта достигается внутри отрезка $[\theta_1, \bar{\theta}]$ в точке θ^*, такой что $f'(\theta^*) = 0$. $\square$

Наряду с оптимальной долей софинансирования проекта имеет смысл рассматривать и оптимальную *общую долю* участия государства в реализации проекта с учетом инфраструктурных затрат:

$$k^* = \frac{J + \theta^* I e^{-\rho l}}{J + I e^{-\rho l}} = \frac{\psi + \theta^*}{\psi + 1}, \quad \text{где } \ \psi = J/(I e^{-\rho l}). \tag{4.10}$$

Как легко увидеть, эта общая доля всегда больше, чем доля софинансирования собственно проекта: $k^* > \theta^*$. Оптимальная общая доля имеет, согласно Теореме 4.2, следующую структуру.

Следствие 4.1. *Оптимальная общая доля государственного участия в финансировании проекта при ограничениях* $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ *равна*

$$k^* = \begin{cases} (\psi + \theta_1)/(\psi + 1), & \text{при } \ \beta g(\theta_1) \le 1 - \gamma, \\ (\gamma\beta + \gamma - 1)/(\beta + \gamma - 1), & \text{при } \ \beta g(\bar{\theta}) < 1 - \gamma < \beta g(\theta_1), \\ (\psi + \bar{\theta})/(\psi + 1), & \text{при } \ \beta g(\bar{\theta}) \ge 1 - \gamma, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $\bar{\theta} = \min\{\theta_2, 1 - b\}$.

4.5. Модельный анализ оптимальной доли софинансирования

Исследуем теперь, как влияют на оптимальную долю θ^* участия государства в финансировании инвестиционного проекта различные параметры модели.

Инфраструктура. Параметры, характеризующие инфраструктуру (объем затрат и длительность создания — инфраструктурный лаг) входят в оптимальную долю θ^* только в виде "агрегированной" величины $\psi = J/(Ie^{-\rho l})$, которая представляет собой отношение инвестиций в инфраструктуру к инвестициям в собственно проект, приведенным к моменту вложений в инфраструктуру, т.е. относительные инфраструктурные затраты.

Как можно видеть из формулы (4.9), оптимальная доля θ^* убывает с ростом относительных инфраструктурных затрат ψ. Более того, если $\psi > \gamma/(1-\gamma)$, то $g(\theta_1) < 0$ при любых $\theta_1 > 0$, и по Теореме 4.2 оптимальная доля софинансирования совпадает с нижней допустимой границей: $\theta^* = \theta_1$. Это означает, что если затраты на инфраструктуру достаточно велики по сравнению с затратами на реализацию собственно проекта, то государству невыгодно (с точки зрения бюджетного эффекта) увеличивать свою долю участия в финансировании проекта.

Однако, если рассматривать оптимальную общую долю k^* участия государства в реализации проекта (определенную в (4.10)), то из (4.11) видно, что она возрастает с ростом относительных инфраструктурных затрат ψ. В предельном случае, при неограниченном росте ψ общая доля k^* приближается к единице.

Переходя к исследованию влияния других параметров модели, заметим, прежде всего, что вид зависимости оптимальных долей от других параметров будет одним и тем же как для доли θ^*, так и для общей доли k^*. Поэтому ниже мы будем говорить только об оптимальной доли θ^*.

Средний темп роста и волатильность прибыли. Заметим, что оптимальная доля софинансирования θ^* зависит от параметров прибыли (среднего темпа роста и волатильности) реализуемого инвестиционного проекта только через показатель β, определенный в Теореме 4.1. Из Теоремы 4.2 нетрудно вывести, что оптимальная доля θ^* будет неубывающей функцией от β. Поэтому, согласно Утверждению 1.5, θ^* будет убывать (точнее, не возрастать) при увеличении показателя неопределенности σ и среднего темпа роста прибыли α.

Предположим, что нижняя граница ограничений на долю θ_1 и относительные инфраструктурные затраты ψ таковы, что $\gamma - \theta_1 - (1-\gamma)\psi > 0$. Из уравнения (4.5) нетрудно вывести, что при положительных темпах роста α справедливо неравенство $\beta < \rho/\alpha$. Поэтому, если выполняется соотношение $\alpha > \frac{\rho}{1-\gamma} g(\theta_1) = \frac{\rho}{1-\theta_1}\left(\frac{\gamma-\theta_1}{1-\gamma} - \psi\right)$, то $\beta g(\theta_1) < 1-\gamma$, и в силу Теоремы 4.2, $\theta^* = \theta_1$.

Это означает, что если темп роста потока прибыли от проекта достаточно велик, государству невыгодно (с точки зрения бюджетного эффекта) участвовать в софинансировании проекта. Иными словами, государству выгодно участвовать в совместном финансировании лишь не очень прибыльных проектов.

Налоговая нагрузка. Оптимальная доля софинансирования θ^* возрастает с увеличением коэффициента налоговой нагрузки γ.

При небольших налоговых нагрузках $\gamma < \bar{\gamma} = \dfrac{1-\theta_1+\beta(\theta_1+\psi)}{1-\theta_1+\beta(1+\psi)}$ оптимальная доля $\theta^* = \theta_1$ (поскольку $\beta g(\theta_1) < 1-\gamma$), т.е. государству невыгодно, с точки зрения бюджетного эффекта, участвовать в совместном инвестировании проектов (сверх необходимой минимальной доли θ_1).

С другой стороны, при больших налоговых нагрузках ($\gamma > \bar{\gamma}$) оптимальная доля софинансирования $\theta^* > \theta_1$, т.е. участие государства в инвестировании проекта ведет к увеличению бюджетного эффекта.

Наконец, если налоговая нагрузка γ будет "очень большой" и превысит уровень $\dfrac{1-\bar{\theta}+\beta(\bar{\theta}+\bar{\psi})}{1-\bar{\theta}+\beta(1+\bar{\psi})}$, то государству выгодно участвовать в совместном финансировании максимально возможным образом: $\theta^* = \bar{\theta}$.

Минимальная граница доли государственного финансирования. Если нижняя граница ограничений на долю госинвестиций достаточно велика: $\theta_1 > \gamma - (1-\gamma)\psi$, то $g(\theta_1) < 0$ и по теореме 4.2 $\theta^* = \theta_1$. В частности, если создание инфраструктуры не является необходимым условием для реализации инвестиционного проекта (т.е. $\psi = 0$), а нижняя граница ограничений θ_1 превышает коэффициент налоговой нагрузки γ, то увеличивать "степень участия государства" в финансировании проекта невыгодно (с точки зрения бюджетного эффекта).

Если ограничения снизу на долю госинвестиций достаточно малы: $\theta_1 < \underline{\theta} = \gamma - (1-\gamma)(1-\gamma+\beta\psi)/(\beta+\gamma-1)$, то, как нетрудно видеть из теоремы 4.2, оптимальная доля софинансирования $\theta^* > \theta_1$.

Наконец, из Теоремы 4.2 следует, что оптимальная доля софинансирования не превышает коэффициента налоговой нагрузки: $\theta^* < \gamma$.

Согласование интересов государства и инвестора. Рассмотрим множество параметров модели $D = \big\{(\alpha, \sigma, \rho, \gamma, \psi) : \ \theta^* > \theta_1\big\}$ — область, в которой оптимальная доля софинансирования θ^* будет строго больше нижней границы θ_1. Согласно Теореме 4.2 это множество совпадает с множеством $D = \left\{(\alpha, \sigma, \rho, \gamma, \psi) : \ \dfrac{\gamma - \theta_1}{1-\gamma} - \psi > \dfrac{1-\theta_1}{\beta}\right\}$.

Аналогично приведенной выше формуле (4.8) для бюджетного эффекта $B(\theta)$ можно получить, что для NPV инвестора $\mathcal{N}(\theta) = \mathbf{E}[V_{\tau^*} - (1-\theta)Ie^{-\rho l}]e^{-\rho\tau^*}$ имеет место соотношение

$$\mathcal{N}(\theta) = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{\beta-1}b - 1 + \theta\right)e^{-\rho l}I, & \text{при } \ \theta \geq 1-b; \\ (1-\theta)^{-\beta+1}b^{\beta}e^{-\rho l}I, & \text{при } \ \theta < 1-b. \end{cases} \tag{4.12}$$

Из формул (4.4), (4.8), (4.12) нетрудно заметить, что оптимальный уровень π^* убывает, а величины бюджетного эффекта $B(\theta)$ и NPV инвестора $\mathcal{N}(\theta)$ возрастают (по θ) при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta^*$. Это означает, что увеличение доли софинансирования (в пределах от θ_1 до θ^*) ведет к росту бюджетного эффекта, чистых приведенных доходов инвестора, а также к более раннему приходу инвестора (уменьшает момент инвестирования).

Поэтому область параметров модели D, в которой оптимальная доля θ^* превышает минимальную допустимую границу, можно рассматривать, как область согласования интересов инвестора и государства. Таким образом, если параметры модели лежат в этой области D, то совместное финансирование инвестиционного проекта (в определенных пределах) становится выгодным не только частному инвестору, но и государству, причем как с точки зрения бюджетного эффекта, так и с точки зрения более быстрого прихода инвестора.

Типичный вид области D (в пространстве параметров проекта (α, σ) при фиксированных ρ, γ, ψ) приведен на Рисунке 4.2. Заметим также, что область согласования D уменьшается при возрастании волатильности прибыли σ, также как и граница для согласования θ^*. Это позволяет говорить, что возможности механизма софинансирования для реализации проектов уменьшаются с ростом неопределенности.

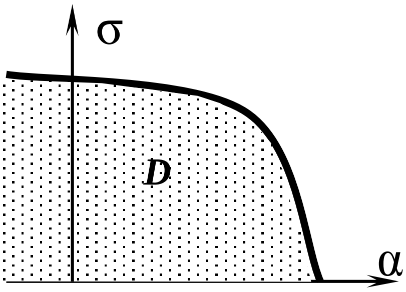


Рисунок 4.2. Область согласования интересов инвестора и государства (в пространстве параметров проекта)

Описанный эффект совершенно аналогичен эффектам согласования интересов инвестора и государства при помощи налоговых механизмов (налоговых каникул и ускоренной амортизации), о которых шла речь в главах 2 и 3. Более того, как и в этих главах можно отметить, что область согласованных интересов D состоит из двух частей: области *полного* согласования $D_f = \left\{ \dfrac{\gamma - \bar{\theta}}{1-\gamma} - \psi \geq \dfrac{1-\bar{\theta}}{\beta} \right\}$ (где увеличение доли финансирования всегда выгодно как инвестору, так и государству) и области *условного* согласования $D_c = D \setminus D_f$ (где выгодным и государству и инвестору является увеличение доли софинансирования θ лишь до уровня θ^*).

Результаты расчетов и некоторые комментарии. На основе выведенных формул для оптимальной доли софинансирования были сделаны многочисленные расчеты по различным вариантам "условно-реальных" данных. Так, в качестве коэффициента налоговой нагрузки использовались величины $\gamma \approx$ 40–50% , локальные параметры проекта (α, σ, ψ) варьировались в достаточно широких (но "экономически разумных") пределах, при этом показатель β попадал, как правило, в диапазон от 3 до 8. Расчеты показали, что величина оптимальной доли государственного участия в инвестировании составляет порядка 20–30%, а общая оптимальная доля участия государства еще несколько выше (в зависимости от необходимых инфраструктурных затрат). Напомним, что оптимальность в данной работе рассматривается исключительно с точки зрения бюджетного эффекта, другие же стороны ГЧП (например, социальные эффекты) остаются вне рамок модели.

Небезынтересно сопоставить полученные цифры с реальными данными. Так, в транспортной Федеральной целевой программе на 2010–2015 годы предусмотрено, что большую часть средств на нее дадут частные инвесторы, причем пропорции государственного и частного финансирования предполагается приблизить к 35:65 (см. [51]). В [32] были приведены результаты исследований по завершенным ГЧП-проектам. Хотя доля участия государства в капитальных затратах по таким проектам в разных отраслях меняется от 0 (использование отходов) почти до 100% (коммунальное хозяйство, оборона, тюрьмы), можно выделить несколько групп объектов инвестирования с близкими долями. Это:

1) автодороги, аэропорты (участие государства 30–40%);

2) образование, здравоохранение, легкое метро (участие государства примерно 65%);

3) железные дороги, инновационные технологии, мосты, уличное освещение (72–80%).

Как видно из приведенных результатов, доля участия государства в проектах из первой группы достаточно близка к тем оптимальным величинам, которые вытекают из нашей модели. Что касается остальных групп, то повышенные доли государственной поддержки их финансирования связаны, по-видимому, со значительными социальными эффектами, ожидаемыми от проектов (здравоохранение, образование, коммунальные услуги), либо с тем, что непосредственный бюджетный эффект от таких проектов (например, инновационных технологий) сам по себе незначителен, однако они необходимы для реализации других, более эффективных, проектов.

4.6. Концессии

В качестве другого примера использования модели инвестиционных ожиданий для исследования механизмов ГЧП остановимся на проблеме оптимизации концессионной платы.

Механизм концессии зарекомендовал себя как эффективный способ реализации общественно-значимых проектов. В России он рассматривается как одна из основных форм государственно-частного партнерства, его применение регламентируется Федеральным законом "О концессионных соглашениях" № 115-ФЗ от 21.07.2005, а также Постановлениями Правительства РФ о различных типовых соглашениях.

В наиболее общем определении "под концессией понимается система отношений, при которой государство или муниципальное образование для достижения общественно значимых целей передают концессионеру – физическому или юридическому лицу – право осуществлять (как правило, на договорной основе) некоторые из своих функций по владению, пользованию, а при определенных условиях и распоряжению государственной и, соответственно, муниципальной, собственностью" [38, с. 7]. Концессия подразумевает, что государство (концедент) передает частному инвестору (концессионеру) право на создание и (или) реконструкцию имущества, эксплуатацию объектов, право собственности на которые принадлежит или будет в дальнейшем принадлежать государству. Другими словами, государство заказывает бизнесу построить или реконструировать, например, какой-то инфраструктурный объект и надолго обеспечить его качественное функционирование.

Механизм концессии позволяет государству уменьшить бюджетные расходы на содержание и эксплуатацию объектов концессии, увеличить бюджетные доходы за счет поступления концессионной платы, улучшить инвестиционный климат, привлечь инвесторов в развитие инфраструктуры, использовать управленческий опыт и технологии частного бизнеса при реализации проектов. В свою очередь, для концессионера открывается доступ к обычно закрытым отраслям экономики (не подлежащим приватизации), возникает возможность получения достаточно регулярных доходов с определенными гарантиями возвратности средств. Кроме того, у участников концессии появляется возможность разделения рисков, возникающих на разных этапах реализации проекта — подробное описание матрицы рисков для типичного проекта ГЧП, а также для конкретных концессионных проектов можно найти в [75].

В России концессионные соглашения могут применяться в отношении объектов инфраструктуры (для автомобильного, железнодорожного, воздушного и водного транспорта, трубопроводов, энергетики), ЖКХ, образования, здравоохранения, производства и переработки сельхозпродукции.

В результате исследования, проведенного в 2013 году Центром развития ГЧП при поддержке Минэкономразвития РФ, выделены 4 основных отрасли, в которых реализуются концессионные проекты в регионах: коммунальная, транспортная, социальная и энергетическая [74]. Наибольшее число концессий (24) реализуется в социальной сфере, а внутри нее — в области здравоохранения (11), а также спорта и туризма (10). В транспортной инфраструктуре подавляющее большинство концессионных соглашений (17 из 21) связано с дорожной отраслью, в энергетике — с объектами теплоснабжения и теплоэнергетики (14 из 17). Наконец, в коммунальной инфраструктуре основные концессионные проекты связаны с развитием систем водоснабжения и водоотведения (7), а также с переработкой и утилизаций твердых бытовых отходов (6).

Передача в концессию осуществляется на возмездной основе на определенный срок или без указания срока. Государство может принимать на себя часть расходов по созданию (реконструкции) или эксплуатации объекта концессионного соглашения, предоставлять концессионеру гарантии в соответствии с законодательством РФ. Взамен концедент получает вознаграждение в виде концессионной платы, вносимой во время эксплуатации объекта (в течение всего срока или отдельных периодов). Концессионная плата устанавливается в форме:

- твердых платежей, периодических или единовременного;
- доли продукции или доходов, полученных в результате деятельности кон-

цессионера;

- передачи в собственность концедента доли собственности концессионера;
- сочетания перечисленных выше форм.

Хотя многие аспекты налогообложения при реализации концессионной деятельности до сих пор не урегулированы в полной мере, концессионная плата при расчете налога на прибыль относится к прочим расходам, уменьшая тем самым налоговую базу.

К настоящему времени в России не существует единой методики определения концессионной платы. Отдельные регионы используют свои подходы к расчету платы, учитывающие, например, рыночную стоимость (или упущенную выгоду) передаваемого концессионеру имущества, отраслевую принадлежность, социальную значимость объекта и др. параметры. В рамках национальной экономики методика расчета концессионной платы существует в Украине с 2000 года (новый вариант этой методики принят в 2016 г.).

Базой для установления величины концессионных платежей обычно является рыночная стоимость объекта концессии. В международной практике сложилось разделение концессионных проектов на два типа: основанных на строительстве новых объектов (greenfield-проекты) и основанных на реконструкции уже существующих активов (brownfield-проекты). При этом подходы к определению базы для расчета платежей по каждому из двух типов проектов существенно различаются. Для brownfield-проектов такой базой является стоимость существующих государственных активов, передающихся в концессию, а для greenfield-проектов — экспертная оценка будущей стоимости построенного объекта, что не способствует стимулированию инвестиций в такие проекты (см. [56]).

Понятно, что для согласования экономических интересов участников концессионного соглашения необходимо при определении платежей учитывать эффективность проекта с позиций как государства, так и концессионера. В [33]) была высказана идея о "равновесном" подходе к определению величины концессионных платежей, при котором "чистая текущая стоимость проекта строительства объекта концессии, рассчитанная для концессионера, равна чистой текущей стоимости доходов бюджета в виде платы за концессию". Тем самым данный подход предполагает получение одинакового чистого дохода концессионером и концедентом. Пример расчета концессионных платежей по этой методике применительно к проекту реконструкции одного из энергообъектов Новосибирска приведен в [87].

4.7. Модель оптимизации концессионной платы

В основе дальнейших рассмотрений лежит модель инвестиционных ожиданий с агрегированными налогами. Отметим, что хотя использованию теории реальных опционов для исследования проектов, реализуемых в рамках ГЧП (в частности, с помощью механизма концессии), посвящено достаточно много работ, основное внимание в них уделяется вопросам оценивания проектов, влиянию конкуренции на инвестиционные решения, ведению переговоров по выработке соглашений по партнерству, выбору партнеров и т.п., а исследований по проблеме концессионных платежей найти не удалось.

4.7.1. Описание модели

Основным элементом модели является некоторый концессионный проект типа greenfield, направленный на создание нового объекта (например, производственного предприятия). По принятой классификации рассматриваемый концессионный проект может быть отнесен к типу BOT, когда концессионер осуществляет строительство и эксплуатацию (на праве собственности) объекта в течение установленного срока, а затем передает объект государству.

Пусть I есть объем инвестиций, необходимых для реализации концессионного проекта. При этом долю μ, $0 \le \mu \le 1$ необходимых инвестиций составляют собственные средства концессионера, а оставшуюся часть расходов $(1-\mu)I$ берет на себя государство (бюджетное финансирование)[20].

---

[20] Возможность совместного финансирования предусмотрена законом "О концессионных соглашениях" (ст. 3, п. 13)

Предполагается, что инвестиции, необходимые для реализации проекта, носят единовременный характер и сразу начинают приносить прибыль. Под прибылью в данной работе будет пониматься выручка за вычетом материальных затрат и оплаты труда (до взятия налогов), что, по-существу, соответствует известному показателю EBITDA. Срок жизни проекта считается бесконечным, а поток прибыли моделируется с помощью случайного процесса $\pi_t,\ t \geq 0$, заданного на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$. Концессионное соглашение заключается сроком на L (лет), начиная с момента инвестирования проекта. Срок соглашения может быть и бесконечным, что вполне согласуется с законодательными положениями. В течение этого срока от концессионера в бюджет поступает постоянный поток концессионных платежей с интенсивностью c, а после окончания срока соглашения в бюджет поступает вся дальнейшая прибыль от эксплуатации объекта концессии.

Пусть τ обозначает момент инвестирования проекта (совместно концессионером и государством), а γ — долю прибыли, идущую на уплату налогов (налоговая нагрузка проекта).

Тогда ожидаемый чистый доход концессионера от эксплуатации объекта концессии, приведенный к моменту инвестирования τ, равен:

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau}^{\tau+L} [(1-\gamma)\pi_t + \gamma_0 c - c]e^{-\rho(t-\tau)}dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right) =$$

$$= (1-\gamma)\int\limits_0^L \mathbf{E}\left(\pi_{\tau+t} \,|\, \mathcal{F}_\tau\right) e^{-\rho t}dt - (1-\gamma_0)A_0 c, \qquad (4.13)$$

где второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой "налоговый щит", возникающий из-за вычета концессионных платежей из налоговой базы по налогу на прибыль (ставка которого равна γ_0); ρ – норма дисконта; а $A_0 = (1 - e^{-\rho L})/\rho$.

Поведение концессионера предполагается рациональным в том смысле, что, наблюдая (в каждый момент времени) информацию о сложившихся рыночных ценах и прогнозе будущего потока прибыли от проекта, он выбирает момент инвестирования τ таким образом, чтобы ожидаемый чистый доход от проекта, приведенный к нулевому (базовому) моменту времени (NPV), был максимальным:

$$\mathbf{E}\,(V_\tau - \mu I)\, e^{-\rho\tau}\chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_{\tau}, \qquad (4.14)$$

где максимум берется по всем марковским моментам τ.

Оптимальный момент инвестирования в задаче (4.14), зависящий от величины концессионных платежей c, будем обозначать τ^*.

Бюджетный эффект (при оптимальном моменте инвестирования τ^*) равен

$$B(c) = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau^*}^{\tau^*+L} (\gamma\pi_t - \gamma_0 c + c)\, e^{-\rho t}dt + \int\limits_{\tau^*+L}^{\infty} \pi_t e^{-\rho t}dt - (1-\mu)Ie^{-\rho\tau^*}\right), \quad (4.15)$$

где первый интеграл описывает поступления в бюджет во время концессионного соглашения (налоги и концессионные платежи), второй — после его окончания (вся прибыль), а последнее слагаемое — затраты государства на начальное инвестирование проекта.

Для оценки потенциальных возможностей концессионной платы как механизма стимулирования инвестиций предлагается оптимизационный подход, при котором величина концессионной платы c выбирается таким образом, чтобы соответствующий бюджетный эффект был максимальным:

$$B(c) \to \max_{c\geq 0}. \qquad (4.16)$$

Далее, говоря об интересах (критерии) государства, мы будем иметь в виду бюджетный критерий (4.16). Предлагаемый оптимизационный подход к выбору концессионной платы можно условно назвать "государственно-ориентированным", поскольку последнее слово при выборе остается за государством, преследующим цель максимального наполнения бюджета от данного концессионного проекта.

4.7.2. Предположения и предварительные результаты

Как и выше, будем считать, что поток прибыли описывается процессом геометрического броуновского движения с темпом роста α, $\alpha < \rho$, и волатильностью (характеризующей неопределенность) σ:

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha dt + \sigma dw_t),\ t \geq 0; \quad \pi_0 \text{ — задано,} \tag{4.17}$$

где w_t $t \geq 0$ — винеровский процесс.

Из этого предположения нетрудно получить, что:

$$V_\tau = (1{-}\gamma)A\pi_\tau - (1{-}\gamma_0)A_0 c, \tag{4.18}$$

где $A_0 = (1 - e^{-\rho L})/\rho$, $A = (1 - e^{-\tilde{\rho} L})/\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} = \rho{-}\alpha$.

При предположении (4.17) относительно потока прибыли оптимальный момент инвестирования в задаче (4.14) равен $\tau^* = \min\{t \geq 0 : \ \pi_t \geq \pi^*\}$, где

$$\pi^* = \pi^*(c) = \frac{\beta}{\beta - 1} h(c), \qquad h(c) = \frac{(1{-}\gamma_0)A_0 c + \mu I}{(1 - \gamma)A}. \tag{4.19}$$

а β есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$ (см. Утверждение 1.4).

Решение задачи (4.14) можно также переписать в терминах не потока прибыли π_t, а в терминах приведенного ожидаемого дохода V_t, определенного в (4.13), как $\tau^* = \min\{t \geq 0 : V_t \geq \mu I\beta/(\beta - 1)\}$.

Обозначим $h_0 = \pi_0(\beta{-}1)/\beta$. Условие $h(c) > h_0$ равносильно тому, что $\pi_0 < \pi^*$, а это, в свою очередь, означает, что оптимальный момент инвестирования τ^* будет положительным (с вероятностью 1). Соответственно, при $h(c) \leq h_0$ имеем $\pi_0 \geq \pi^*$ и, следовательно, $\tau^* = 0$ с вероятностью 1. В свою очередь, условие $h(c) \leq h_0$ эквивалентно тому, что

$$c \leq c_0 := \frac{1}{(1 - \gamma_0)A_0}\left[\pi_0 \frac{\beta - 1}{\beta}(1 - \gamma)A - \mu I\right]. \tag{4.20}$$

Используя формулу (4.19), можно получить явное выражение для бюджетного эффекта (4.15).

При $h(c) \leq h_0$ имеем $\tau^* = 0$, и

$$B(c) = \pi_0\left(\gamma A + \frac{e^{-\tilde{\rho}L}}{\tilde{\rho}}\right) + (1{-}\gamma_0)A_0 c - (1{-}\mu)I = \pi_0\left(\gamma A + \frac{e^{-\tilde{\rho}L}}{\tilde{\rho}}\right) + (1{-}\gamma)Ah(c) - I.$$

При $h(c) > h_0$, используя соотношение $\mathbf{E}e^{-\rho\tau^*} = (\pi_0/\pi^*)^\beta$, получим следующее выражение:

$$B(c) = \begin{cases} \pi_0 \left(\gamma A + \dfrac{e^{-\tilde{\rho}L}}{\tilde{\rho}} \right) + (1{-}\gamma) A h(c) - I, & \text{если } \ c \leq c_0, \\ h_0^{\beta} [h(c)]^{-\beta} \left[\left(\dfrac{\beta}{\tilde{\rho}} - (1{-}\gamma) A \right) h(c) - (\beta - 1) I \right] \dfrac{1}{\beta - 1}, & \text{если } \ c > c_0, \end{cases} \tag{4.21}$$

где $h(c)$ определено в (4.19).

Аналогично можно вывести и формулу для оптимального NPV концессионера $N(c) = \mathbf{E} \left(V_{\tau^*} - \mu I \right) e^{-\rho \tau^*}$:

$$N(c) = \begin{cases} [\pi_0 - h(c)](1 - \gamma) A, & \text{если } \ c \leq c_0, \\ h_0^{\beta} [h(c)]^{-\beta+1} \dfrac{1 - \gamma}{\beta - 1} A, & \text{если } \ c > c_0. \end{cases} \tag{4.22}$$

4.7.3. Решение оптимизационной задачи

Следующий результат полностью описывает решение оптимизационной задачи (4.16). Для упрощения формулировок введем следующие обозначения:

$$h_1 = \frac{\beta \tilde{\rho} I}{\beta - (1 - \gamma)(1 - e^{-\tilde{\rho}L})}, \quad h^* = (1 - \gamma) A h_1 = \frac{\beta (1 - \gamma)(1 - e^{-\tilde{\rho}L}) I}{\beta - (1 - \gamma)(1 - e^{-\tilde{\rho}L})}. \tag{4.23}$$

где $\tilde{\rho} = \rho - \alpha$.

Теорема 4.3. *Оптимальный поток концессионных платежей c^* имеет следующий вид:*

$$c^* = \max \left(c_1, \frac{\rho (h^* - \mu I)}{(1 - \gamma_0)(1 - e^{-\rho L})} \right), \tag{4.24}$$

где $c_1 = \max(0, c_0)$, а c_0 определено в (4.20).

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку бюджетный эффект $B(c)$ возрастает при $c \leq c_0$ (см. формулу (4.21)), то оптимизационную задачу (4.16) имеет смысл рассматривать только в области $\{c \geq c_1\}$.

Введем функцию

$$g(z) = z^{-\beta} \left[\left(\beta - (1{-}\gamma)(1 - e^{-\tilde{\rho}L}) \right) z - \tilde{\rho} (\beta - 1) I \right].$$

Как видно из формулы (4.21), бюджетный эффект $B(c)$ в области $\{c \geq c_0\}$ отличается от функции $g(h(c))$ лишь положительным множителем, не завищим от c. Нетрудно подсчитать, что

$$g'(z) = z^{-\beta-1}(\beta-1)\left[\tilde{\rho}\beta I - \left(\beta - (1{-}\gamma)(1-e^{-\tilde{\rho}L})\right) z\right],$$

таким образом, знак $g'(z)$ совпадает со знаком функции $\tilde{\rho}\beta I - \left[\beta - (1{-}\gamma)(1-e^{-\tilde{\rho}L})\right] z$, которая убывает по z.

Если $g'(h(c_1)) \le 0$, т.е. $h(c_1) \ge \tilde{\rho}\beta I \left[\beta - (1{-}\gamma)(1-e^{-\tilde{\rho}L})\right]^{-1} = h_1$, то $g'(z) \le 0$ при всех $z \ge h(c_1)$, тем самым бюджетный эффект убывает по c. Поэтому оптимальным потоком платежей будет $c^* = c_1$.

Если $g'(h(c_1)) > 0$, т.е. $h(c_1) < h_1$, то $g(z)$ имеет максимум в точке $z = h_1$. Тем самым бюджетный эффект $B(c)$ имеет максимум в точке $c^* > c_1$, такой что $h(c^*) = h_1$.

Теорема доказана. ☐

Отметим, что $H(c) = (1-\gamma_0)A_0 c + \mu I$ представляет собой суммарные затраты по концессионной плате (с учетом "налогового щита") и начальным инвестициям концессионера, приведенные к моменту инвестирования. В терминах этого выражения формулу для оптимального потока платежей можно записать следующим образом.

Следствие 4.2. *Оптимальный поток концессионных платежей c^* удовлетворяет соотношению:*

$$H(c^*) = \max(H(c_1), h^*).$$

Следствие 4.3. *Оптимальный порог инвестирования при оптимальных платежах $\pi^{**} = \pi^*(c^*)$ равен*

$$\pi^{**} = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\max(h(c_1), h_1) = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\max\left(\frac{\mu I}{(1-\gamma)A},\ \pi_0(1-1/\beta),\ h_1\right). \quad (4.25)$$

4.8. Модельный анализ оптимальной концессионной платы

Исследуем, как влияют на оптимальные концессионные платежи c^* и оптимальный уровень инвестирования π^{**} (характеризующий время инвестирования проекта при оптимальных платежах) различные параметры модели.

Представленные ниже выводы модельного анализа можно условно разделить на два типа. К одному из них можно отнести те, которые согласуются с экономической интуицией и дополняют ее определенными количественными оценками. Само наличие таких "интуитивно понятных" выводов дает возможность говорить о некой состоятельности ("адекватности") предложенной в данной работе модели. В то же время ряд других "качественных" выводов из модели, на наш взгляд, уже не слишком укладываются в привычные "интуитивные" рамки, что можно объяснить немонотонным характером установленных зависимостей между переменными.

Отсутствие концессионной платы. По существующему законодательству концессионер должен вносить концеденту плату, размер которой устанавливается концессионным соглашением. Однако, как следует из полученных выше результатов, оптимальные концессионные платежи могут при определенных условиях быть нулевыми.

Для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие два требования.

Во-первых, должно выполняться равенство $c_1 = 0$, т.е. $c_0 \leq 0$. Последнее неравенство справедливо, если

$$\pi_0(1-\gamma)A \leq \frac{\beta}{\beta-1}\mu I. \tag{4.26}$$

Левая часть (4.26) представляет собой величину V_0 с нулевой концессионной платой (см. (4.18)). Поэтому неравенство (4.26) означает, что начальные условия таковы, что инвестировать проект сразу (в нулевой момент времени) концессионеру не оптимально даже при отсутствии концессионных платежей.

Во-вторых, для нулевой оптимальной платы за концессию необходимо соотношение $h^* \leq \mu I$. Это условие можно переписать в следующем виде:

$$\mu \geq \frac{\beta(1-\gamma)(1-e^{-\tilde{\rho}L})}{\beta-(1-\gamma)(1-e^{-\tilde{\rho}L})}, \tag{4.27}$$

или как ограничение на налоговую нагрузку:

$$\gamma \geq \frac{(\beta+\mu)(1-e^{-\tilde{\rho}L})-\beta\mu}{(\beta+\mu)(1-e^{-\tilde{\rho}L})}. \tag{4.28}$$

Неравенство (4.27) показывает, что затраты концессионера на инвестирование проекта при нулевых платежах не должны быть слишком маленькими. Поэтому, если все начальные инвестиции берет на себя государство (т.е. $\mu = 0$), то оптимальная концессионная плата не может быть нулевой, хотя государство, помимо платы, получает и другие доходы от реализации проекта (налоги во время срока концессионного соглашения и всю прибыль после его окончания).

Неравенство (4.28) констатирует, что налоговая нагрузка в случае нулевой оптимальной концессионной платы также не может быть маленькой. В частности, если все инвестиции делает концессионер ($\mu = 1$), то (4.28) превращается в ограничение

$$\gamma \geq \frac{1 - (\beta + 1)e^{-\tilde{\rho}L}}{(\beta + 1)(1 - e^{-\tilde{\rho}L})},$$

а при длительных сроках концессии ($L = \infty$) — в простое неравенство $\gamma \geq 1/(\beta + 1)$, которое не выглядит "экзотическим" для большинства налоговых систем (учитывая, что для "типичных" проектов показатель β меняется в пределах от 2 до 8).

Зависимость от налоговой нагрузки. Для исследования данной зависимости будем считать, что при изменении общей налоговой нагрузки γ ставка налога на прибыль γ_0 меняется пропорционально γ, т.е. $\gamma_0 = \theta\gamma$, где θ — фиксированное число ($0 \leq \theta < 1$).

Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что c_0 и $h^*/(1 - \gamma_0)$ убывают по γ, если $\beta > (1 - e^{-\tilde{\rho}L})/(1 - \theta)$. Поэтому, оптимальная концессионная плата убывает при увеличении налоговой нагрузки. Более того, как отмечалось в предыдущем разделе, при больших налоговых нагрузках концессионная плата становится нулевой.

Зависимость оптимального уровня инвестирования π^{**} от налоговой нагрузки γ носит более сложный характер. А именно, всю область изменения γ от 0 до 1 можно разбить на три части, определяемые величинами $\underline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$. Эти части соответствуют тому, на какой из трех величин достигается максимум в правой части равенства (4.25). Общий вид зависимости представлен на Рисунке 4.3.

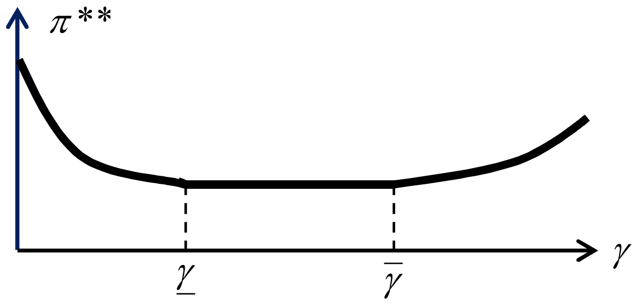


Рисунок 4.3. Зависимость оптимального уровня инвестирования от налоговой нагрузки

Область $0 \le \gamma \le \underline{\gamma}$ соответствует ситуации $c^* > c_1$ (или $h_1 > h(c_1)$). В этой области оптимальный уровень π^{**} убывает по γ. Отсюда следует, вопреки экономической интуиции, что увеличение налоговой нагрузки (в определенных пределах) в сочетании с оптимальной концессионной платой может ускорить приход инвестора.

При $\underline{\gamma} \le \gamma \le \overline{\gamma}$ оптимальный уровень постоянен и равен π_0. Здесь максимум в (4.25) достигается на $\pi_0(1 - 1/\beta)$, а инвестирование проекта происходит сразу (в нулевой момент времени).

Наконец, в области $\overline{\gamma} \le \gamma < 1$ выполняется неравенство $\mu I/[(1-\gamma)A] > \pi_0(1-1/\beta)$, концессионные платежи становятся нулевыми и оптимальный уровень π^{**} возрастает по γ, а тем самым время прихода инвестора увеличивается.

Зависимость от доли собственных средств концессионера. Как нетрудно видеть из Теоремы 4.3 и формулы (4.20), оптимальный платеж c^* как функция от доли собственных средств инвестора μ имеет следующий вид:

$$c^* = \max\left\{\max\left(\pi_0 \frac{\beta-1}{\beta}, h_1\right) - \frac{\rho\mu I}{(1-\gamma_0)(1-e^{-\rho L})}, 0\right\}.$$

Тем самым, оптимальные платежи уменьшаются (линейным образом) с ростом доли инвестора μ до величины $\bar{\mu} = \min\left\{\max\left(\pi_0(1-1/\beta), h_1\right)(1-\gamma_0)(1-e^{-\rho L})/(\rho I),\, 1\right\}$, пока не достигнут нуля или максимально возможной доли $\mu = 1$.

Что касается оптимального уровня инвестирования, то π^{**} будет постоянным, пока доля инвестора не превысит $\bar{\mu}$, а затем будет расти как линейная функция. Это означает, что если государство уменьшает свое участие в финансировании проекта (до определенного уровня), то с помощью оптимальных концессионных платежей можно избежать более позднего прихода инвестора.

Зависимость от среднего темпа роста и волатильности прибыли. Оптимальная величина концессионных платежей c^* зависит от параметров прибыли (среднего темпа роста и волатильности) концессионного проекта только через показатель β, определенный после формулы (4.19). Из Утверждения 1.5 (глава 1) следует, что β является убывающей функцией от α и σ.

Теперь из формул (4.20) и (4.23) выводится, что c_0 монотонно возрастает по β (тем самым, c_1 не убывает по β), а h_1 убывает по β.

Оптимальный уровень инвестирования π^{**} можно (см. Следствие 4.3) записать следующим образом:

$$\pi^{**} = \max\left(\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\mu I}{(1-\gamma)A},\ \pi_0,\ \frac{\beta}{\beta-1}\cdot h_1\right).$$

Поэтому π^{**} будет убывать по β, т.е. при увеличении среднего темпа роста прибыли концессионера или ее волатильности момент инвестирования проекта будет откладываться на более отдаленный срок.

Зависимость самих оптимальных концессионных платежей от α и σ может быть немонотонной. Так, например, из формулы (4.20) для c_0 следует, что c_1 не убывает по β, а тем самым не возрастает по σ. В то же время h^*, определенная в (4.23), убывает по β, т.е. возрастает по σ. Поэтому, согласно Теореме 4.3, оптимальные платежи c^* есть максимум из невозрастающей и возрастающей (по σ) функций. Возможные варианты поведения c^* приведены на Рисунке 4.4.

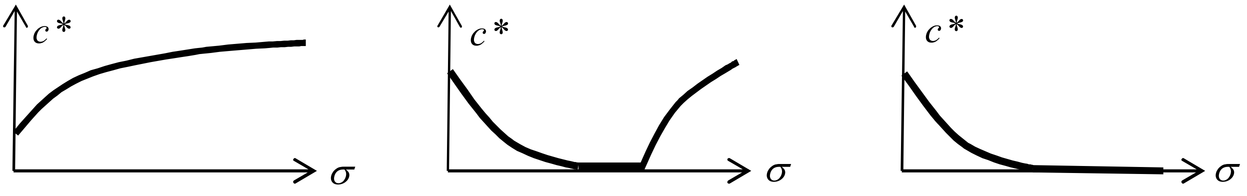


Рисунок 4.4. Различные типы зависимости оптимальной концессионной платы от волатильности

Согласование интересов государства и концессионера. Остановимся еще на одном эффекте, связанном не столько с оптимальной концессионной платой, сколько с отступлением от нее.

Предположим, что государство выбрало концессионную плату c из каких-то своих соображений, и она оказалась больше платы c^*, оптимальной в рамках рассматриваемой здесь модели.

Очевидно, что снижение платы всегда выгодно концессионеру, поскольку способствует увеличению его NPV (см. формулу (4.22)), а также более быстрому инвестированию (см. (4.19)). Но снижение платы, пока она не становится меньше оптимальной величины c^*, ведет также к росту бюджетного эффекта, поскольку бюджетный эффект после точки максимума начинает убывать. Поэтому c^* можно рассматривать как нижнюю границу для концессионной платы, выше которой имеет место "согласование" интересов государства и инвестора в том смысле, что предоставление государством "льготы" по снижению концессионной платы оказывается выгодным всем участникам концессионного соглашения: возрастает бюджетный эффект, ускоряется приход инвестора и увеличивается его NPV.

Глава 5. Оптимизация бюджетных субсидий при кредитовании инвестиционных проектов

В данной главе демонстрируется применение модели инвестиционных ожиданий (изложенной в главе 1) к такому station неналоговому механизму стимулирования инвестиций как бюджетные субсидии на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционного проекта.[21]

5.1. Механизм бюджетных субсидий на уплату процентов по кредитам

В современных условиях банки стремятся компенсировать высокую ключевую ставку, повышенные риски (в том числе, риск невозврата кредита), а также издержки на обслуживание кредитов путем увеличения процентных ставок по кредиту. Поскольку повышенные проценты за кредит ведут, как правило, к снижению инвестиционной активности, становится актуальной проблема компенсации (со стороны государства) дополнительных расходов инвесторов по привлекаемым заемным средствам для реализации инвестиционных проектов.

В настоящее время широко используется механизм бюджетных субсидий на возмещение части затрат на уплату процентов по кредитам. Размер таких субсидий зависит от отраслевых, территориальных и иных условий, и колеблется, в основном, от 50 до 100% ключевой ставки ЦБ РФ, но не более фактических затрат по уплате процентов (или их соответствующих долей). В первую очередь, такие субсидии предоставляются агропромышленному комплексу, а также приоритетным отраслям гражданской промышленности (14 отраслей, закрепленных государственной программой РФ "Развитие промышленности и повышение ее конкурентоспособности" и ее подпрограммами).

В частности, Постановлением Правительства РФ от 28.12.2012 г. № 1460

---

[21] Результаты главы опубликованы в работе [14] с соавтором.

были утверждены правила предоставления субсидий на возмещение части затрат на уплату процентов по кредитам, полученным организациями агропромышленного комплекса. По этим правилам субсидии предоставлялись в размере до 80% от ключевой ставки ЦБ РФ из федерального бюджета и до 20% из бюджетов субъектов федерации, а по отдельным видам деятельности (производство мяса, крупного рогатого скота и молока) субсидии могли даже превышать указанную ставку (в пределах 3%).

Согласно Постановлению Правительства РФ от 03.01.2014 г. № 3 (с изменениями от 02.04.2015) компаниям, реализующим новые комплексные инвестиционные проекты по приоритетным направлениям гражданской промышленности, на компенсацию части затрат на уплату процентов по кредитам, полученным в российских кредитных организациях в 2014–2016 гг., предоставлялись субсидии в размере до 70% от ключевой ставки (или процентной ставки по кредиту, если она меньше ключевой ставки). При этом субсидируемые проекты должны:

- быть направлены на создание предприятия, относящегося к обрабатывающему производству, по одному из приоритетных направлений гражданской промышленности;
- предусматривать расходы инвестиционного характера (приобретение или долгосрочную аренду земельных участков, строительство производственных зданий и сооружений, приобретение основных средств и т.п.);
- иметь общую стоимость от 150 млн руб. до 5 млрд руб.;
- создавать высокопроизводительные рабочие места.

В качестве критериев для отбора проектов выступают показатели финансовой, бюджетной и социально-экономической эффективности.

Федеральный закон "О территориях опережающего социально-экономического развития в Российской Федерации" № 473 от 29.12.2014 (в редакции от 13.07.2015) предусматривает предоставления субсидий на возмещение процентной ставки по кредитам, привлеченным инвесторами на строительство объектов инфраструктуры (на соответствующих территориях), в размере до 100% от ключевой ставки.

Субсидии на уплату процентов по кредитам предоставляют не только федеральный центр, но и многие регионы по своим приоритетным направлениям, а также для развития малого и среднего предпринимательства. При этом в качестве одного из критериев отбора получателей субсидий часто выступает превышение объема планируемых налоговых поступлений и иных обязательных платежей в бюджет субъекта федерации над суммой субсидий (например, в Ростовской области, Ставропольском крае и др.).

Поскольку субсидирование кредитных выплат, с одной стороны, является стимулирующим фактором для инвестора, который в конечном итоге приводит к дополнительным поступлениям в бюджет, а с другой стороны, связано с затратами из бюджета, возникает проблема "разумного" (в том или ином смысле) выбора величины субсидируемых процентов.

Хотя существует много работ, касающихся субсидирования кредитов, большинство из них носят чисто описательный (для конкретной отрасли или региона) характер. Работы, посвященные модельному анализу механизма субсидирования по кредитам, почти отсутствуют в научной литературе. В этом плане отметим исследования [98, 122, 140], где для различных вариантов модели общего равновесия изучалось влияние субсидий по кредиту на показатели экономического развития (в частности, в США и Бразилии).

В настоящей главе оптимизационный подход, описанный в главе 2, развивается примнительно к определению величины субсидируемых процентов по кредиту, взятому для реализации инвестиционного проекта. При этом в качестве критерия оптимальности берется ожидаемый бюджетный эффект, связанный с реализацией инвестиционного проекта.

5.2. Описание модели

В основе рассмотрений лежит модель инвестиционных ожиданий, достаточно подробно описанная в главе 1.

Финансирование. Пусть I есть объем инвестиций, необходимых для реализации некоторого инвестиционного проекта. Как уже говорилось ранее, предположение о независимости инвестиций от времени (и даже о детерминированной величине инвестиций) не является существенным в данной модели, а лишь "отягощает" основные формулы, но не меняет при этом качественные выводы.

Финансирование проекта предполагается смешанным. Это означает, что долю θ, $0 \leqslant \theta < 1$ необходимых инвестиций составляют собственные средства инвестора, а оставшаяся сумма инвестиций берется в кредит на срок L (лет) под процент λ (годовых). Возврат самого кредита и начисленных по нему процентов начинается сразу после начала функционирования проекта. График возврата основного тела кредита (без учета процентов) описывается с помощью плотности потока платежей (на единицу кредита) $f_t \geq 0,\ 0 \leq t \leq L : \int_0^L f_t dt = 1$[22]. Такое описание графика возврата кредита включает в себя многие распространенные схемы возврата кредита, точнее, их варианты в непрерывном времени. Так, равномерный возврат соответствует плотности $f_t = 1/L,\ 0 \leq t \leq L$, а аннуитетные платежи (когда сумма основных выплат и процентов одна и та же в каждый момент времени) описываются экспоненциальной плотностью $f_t = \lambda e^{\lambda t}/(e^{\lambda L} - 1),\ 0 \leq t \leq L$. Схема, при которой значительная часть кредита возвращается уже по окончании срока кредитования (так называемый шаровой кредит) формально не укладывается в описанный выше график возврата, но может быть легко получена добавлением к плотности возврата дельта-функции (со скачком в момент времени L).

Пусть τ есть момент начала выплат по кредиту, $r_t = \displaystyle\int_t^L f_s ds$ — остаточный долг (на единицу кредита) в момент времени $\tau + t$, а μ — величину субсидируемого процента по кредиту. Тогда полные выплаты по кредиту (включая основные выплаты, проценты и субсидии по процентам), приведенные к момен-

---

[22] Иногда, для упрощения записи формул удобно считать, что график возврата f_t задан при всех $t \geq 0$ и $f_t = 0$ при $t > L$.

ту τ, приходящиеся на единицу кредита, равны

$$\begin{aligned} k = \int_{\tau}^{\tau+L} (f_{t-\tau} + \lambda r_{t-\tau} - \mu r_{t-\tau}) e^{-\rho(t-\tau)} dt = \int_0^L [f_t + (\lambda-\mu) r_t] e^{-\rho t} dt = \\ = F + (\lambda-\mu) \int_0^L \left(\int_t^L f_s ds \right) e^{-\rho t} dt = F + (\lambda-\mu) \int_0^L f_s \left(\int_0^s e^{-\rho t} dt \right) ds = \\ = F + (\lambda-\mu)(1-F)/\rho, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где ρ — коэффициент дисконтирования, а $F = \displaystyle\int_0^L f_t e^{-\rho t} dt$ — приведенные выплаты по основному телу кредита. Естественно предполагать, что $\lambda > \rho$.

Таким образом, общая сумма выплат за кредит (с учетом процентов и субсидий) равна $k(1-\theta)I$.

Денежные потоки. Предполагается, что инвестиции, необходимые для реализации проекта, носят единовременный характер и сразу начинают приносить поток прибыли. Под прибылью будет пониматься выручка за вычетом материальных затрат и оплаты труда (до взятия налогов), что, по-существу, соответствует известному показателю EBITDA. Срок жизни проекта считается бесконечным, а поток прибыли моделируется с помощью случайного процесса $\pi_t,\ t \geq 0$, заданного на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$.

Будем считать, что поток прибыли описывается процессом геометрического броуновского движения с темпом роста $\alpha,\ \alpha < \rho$, и волатильностью σ:

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha dt + \sigma dw_t),\ t \geqslant 0; \quad \pi_0 \text{ — задано}, \quad w_t \text{ — винеровский процесс.}$$

Пусть τ обозначает момент инвестирования проекта (совпадающий с моментом кредитования), а γ — долю прибыли, идущую на уплату налогов (налоговая нагрузка проекта).

Тогда ожидаемый чистый доход от реализованного проекта, приведенный к моменту инвестирования τ, равен:

$$V_\tau = \mathbf{E} \left(\int_{\tau}^{\infty} [(1-\gamma)\pi_t + \gamma_{\text{пр}} \lambda_0 r_{t-\tau}(1-\theta)I]\, e^{-\rho(t-\tau)} dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right) - (1-\theta)Ik, \tag{5.2}$$

где k определено в (5.1).

Второе слагаемое в квадратных скобках представляет собой так называемый "процентный налоговый щит", возникающий, согласно ст. 269 Налогового Кодекса РФ, из-за вычета из налоговой базы по налогу на прибыль уплачиваемых по кредиту процентов. При этом величина вычитаемых процентов не должна превышать некоторое предельное значение λ_0, равное минимуму из фактических процентов и 1.25 от ключевой ставки ЦБ РФ[23].

Аналогично выкладкам в (5.1) нетрудно установить, что

$$\int\limits_{\tau}^{\infty} \gamma_{\text{пр}}\lambda_0 r_{t-\tau} e^{-\rho(t-\tau)} dt = \gamma_{\text{пр}}\lambda_0(1-F)/\rho.$$

Отсюда,

$$V_\tau = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty} (1-\gamma)\pi_t e^{-\rho(t-\tau)} dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right) - (1-\theta)I\tilde{k}, \tag{5.3}$$

где $\tilde{k} = F + (\lambda - \mu - \gamma_{\text{пр}}\lambda_0)(1-F)/\rho$.

Это означает, что на величину $\tilde{\lambda} = \gamma_{\text{пр}}\lambda_0$ процентного налогового щита, приходящегося на единицу кредита, можно смотреть (с модельной точки зрения), как на некую "дополнительную субсидию (от государства)", идущую на частичную компенсацию затрат инвестора по уплате процентов за кредит. При этом считается, что никаких вычетов из налоговой базы налога на прибыль по уплате процентов по долговым обязательствам не производится. На конец 2017 г. величина $\tilde{\lambda}$ не превышала 2.06%.

Поведение инвестора. Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе информации о сложившихся рыночных ценах и прогноза будущего потока прибыли от проекта выбрать момент инвестирования τ таким образом, чтобы ожидаемый чистый доход от проекта, приведенный к нулевому моменту времени (NPV), был максимальным:

$$\mathbf{E}\left(V_\tau - \theta I\right) e^{-\rho\tau} \to \max_{\tau}, \tag{5.4}$$

---

[23] На конец 2017 года величина λ_0 составляла $\min(\lambda, 10.31\%)$.

где максимум берется по всем марковским (относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$) моментам τ. Этот момент инвестирования (правило инвестирования) и определяет поведение инвестора.

Как следует из Утверждения 1.4, при сформулированном выше предположении относительно потока прибыли, оптимальный момент инвестирования в задаче (5.4) равен

$$\tau^* = \min\{t \geqslant 0 : \ \pi_t \geqslant \pi^*\}, \quad \text{где} \ \ \pi^* = \pi^*(\mu) = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha}{1 - \gamma} \cdot Ih, \tag{5.5}$$

$$h = \theta + (1 - \theta) \left[F + (\lambda - \tilde{\lambda} - \mu)(1 - F)/\rho\right], \tag{5.6}$$

а β есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$.

Обозначим $h_0 = \pi_0(\beta{-}1)(1{-}\gamma)/[I\beta(\rho{-}\alpha)]$. Как нетрудно видеть, условие $h > h_0$ равносильно тому, что $\pi_0 < \pi^*$, а это, в свою очередь, означает, что оптимальный момент инвестирования τ^* будет положительным (с вероятностью 1). Соответственно, при $h \leq h_0$ имеем $\pi_0 \geq \pi^*$ и, следовательно, $\tau^* = 0$ с вероятностью 1.

5.3. Задача оптимизации субсидий

Величина субсидируемых процентов μ определяет оптимальный момент инвестирования и начала реализации инвестиционного проекта, а вместе с ним и ожидаемые дисконтированные налоговые поступления от реализуемого проекта в бюджет.

Государство несет затраты на реализацию инвестиционного проекта, связанные с субсидированием кредита. В этих условиях бюджетный эффект от проекта (при оптимальном поведении инвестора) равен разности ожидаемых дисконтированных налоговых поступлений от проекта и затрат государства на субсидирование процентов по кредиту. В рамках описанной в данной главе модели такой бюджетный эффект равен

$$B(\mu) = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau^*}^{\infty} \left[\gamma\pi_t - (1 - \theta)I(\mu + \tilde{\lambda})r_{t-\tau^*}\right] e^{-\rho_s t} dt\right), \tag{5.7}$$

где ρ_s — норма дисконта для бюджета (государства), которая, вообще говоря, может отличаться от дисконта ρ, используемого инвестором.

В соответствии с оптимизационным подходом, описанным в главе 2, величина субсидируемых процентов выбирается таким образом, чтобы бюджетный эффект был максимальным:

$$B(\mu) \to \max_{0 \le \mu \le \overline{\mu}}, \tag{5.8}$$

где $\overline{\mu}$ — максимально допустимая величина субсидируемых процентов (например, заданная доля от ключевой ставки ЦБ РФ).

Используя формулу (5.5), можно получить явное выражение для бюджетного эффекта (5.7).

При $h \le h_0$ имеем $\tau^* = 0$, и

$$\begin{aligned} B(\mu) &= \gamma \frac{\pi_0}{\rho_s - \alpha} - (1-\theta) I (\mu + \tilde{\lambda}) \frac{1 - F_s}{\rho_s} = \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\gamma}{1 - \gamma} \cdot \frac{\rho - \alpha}{\rho_s - \alpha} h_0 - (1-\theta)(\mu + \tilde{\lambda}) \frac{1 - F_s}{\rho_s} \right) I, \end{aligned}$$

где $F_s = \displaystyle\int_0^L f_t e^{-\rho_s t} dt$ аналогичен величине F, только с дисконтом ρ_s вместо ρ.

При $h > h_0$ необходимо использовать соотношение $\mathbf{E} e^{-\rho_s \tau^*} = (\pi_0 / \pi^*)^{\beta_s}$, где β_s есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho_s = 0$. Окончательно получим следующее выражение:

$$B(\mu) = \begin{cases} \left[B h_0 - (1-\theta)(\mu + \tilde{\lambda}) \dfrac{1 - F_s}{\rho_s} \right] I, & \text{при} \ \ h \le h_0, \\ h_0^{\beta_s} h^{-\beta_s} \left[B h - (1-\theta)(\mu + \tilde{\lambda}) \dfrac{1 - F_s}{\rho_s} \right] I, & \text{при} \ \ h > h_0, \end{cases} \tag{5.9}$$

где $B = \dfrac{\beta}{\beta - 1} \cdot \dfrac{\gamma}{1 - \gamma} \cdot \dfrac{\rho - \alpha}{\rho_s - \alpha}$.

Оптимальные субсидии. Следующий результат полностью описывает решение оптимизационной задачи (5.8). Для упрощения формулировок введем следующие обозначения:

$$c = \frac{1-F}{\rho}, \quad c_s = \frac{1-F_s}{\rho_s}, \quad b = Bc, \tag{5.10}$$

$$A = \theta + (1-\theta)\left(F + \lambda\frac{1-F}{\rho}\right), \quad D = \frac{A}{(1-\theta)(b+c_s)c}, \tag{5.11}$$

$$\mu_0 = \frac{A-h_0}{(1-\theta)c} - \tilde{\lambda}, \quad \mu_1 = \min(\mu_0, \overline{\mu}). \tag{5.12}$$

Как нетрудно заметить, условие $h \le h_0$ равносильно тому, что $\mu \ge \mu_0$, при этом бюджетный эффект $B(\mu)$ будет убывать по μ (см. формулу (5.9)). Тем самым, если $\mu_0 \le 0$, то оптимизационная задача (5.8) всегда имеет "вырожденное" решение $\mu^* = 0$. Поэтому, чтобы исключить такой случай, будем далее полагать, что $\mu_0 > 0$.

Теорема 5.1. *Оптимальные субсидии μ^* по уплате процентов по кредиту имеют вид:*

1) $\mu^* = 0$, если $\widehat{\mu} \le \tilde{\lambda}$;

2) $\mu^* = \widehat{\mu} - \tilde{\lambda}$, если $\tilde{\lambda} < \widehat{\mu} < \mu_1 + \tilde{\lambda}$;

3) $\mu^* = \mu_1$, если $\widehat{\mu} \ge \mu_1 + \tilde{\lambda}$,

где $\widehat{\mu} = D\left(b - \dfrac{c_s}{\beta_s - 1}\right)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $B(\mu)$ убывает при $\mu \ge \mu_0$, то максимум в задаче (5.8) достаточно рассматривать только в области $0 \le \mu \le \mu_1$.

Введем переменную $\tilde{\mu} = \mu + \tilde{\lambda}$ и функцию

$$g(\tilde{\mu}) = [Bh - (1-\theta)c_s\tilde{\mu}]h^{-\beta_s} = [BA - (1-\theta)(b+c_s)\tilde{\mu}][A - (1-\theta)c\tilde{\mu}]^{-\beta_s},$$

которая определяет бюджетный эффект (см. (5.9)).

Как нетрудно подсчитать,

$$g'(\tilde{\mu}) = A(\beta_s - 1)\left(b - \frac{c_s}{\beta_s - 1} - \tilde{\mu}/D\right)[A - (1-\theta)c\tilde{\mu}]^{-\beta_s - 1}.$$

таким образом, знак $g'(\tilde{\mu})$ совпадает со знаком функции $b - \dfrac{c_s}{\beta_s - 1} - \tilde{\mu}/D$, которая убывает по $\tilde{\mu}$.

Если $g'(\tilde{\lambda}) \le 0$ (что эквивалентно условию из п. 1 теоремы), то $g'(\tilde{\mu}) \le 0$ и при всех $\tilde{\mu} \ge \tilde{\lambda}$, т.е. функция $g(\mu)$ убывает при $\tilde{\mu} \ge \tilde{\lambda}$ и, в силу формулы (5.9), бюджетный эффект убывает по μ. Поэтому оптимальная доля субсидий $\mu^* = 0$.

Если $g'(\mu_1 + \tilde{\lambda}) < 0 < g'(\tilde{\lambda})$, т.е. выполняется п. 2 теоремы, то $g(\tilde{\mu})$ имеет максимум внутри отрезка $[\gamma_i \lambda_0, \mu_1 + \tilde{\lambda}]$ в точке $\widehat{\mu}$, такой что $g'(\widehat{\mu}) = 0$. Тем самым бюджетный эффект $B(\mu)$ имеет максимум в точке $\mu^* = \widehat{\mu} - \tilde{\lambda}$.

Наконец, если $g'(\mu_1 + \tilde{\lambda}) \ge 0$, то функция $g(\mu)$ возрастает при $\mu \le \mu_1 + \tilde{\lambda}$, и максимум бюджетного эффекта достигается в граничной точке $\mu^* = \mu_1$.

Теорема доказана. ☐

В случае одинаковых дисконтов инвестора и государства оптимальные субсидии можно записать следующим образом:

Следствие 5.1. *Если $\rho = \rho_s$, то*

$$\mu^* = \begin{cases} 0, & \textit{при} \;\; \Gamma \le \tilde{\lambda}/\tilde{F}, \\ \Gamma\tilde{F} - \tilde{\lambda}, & \textit{при} \;\; \tilde{\lambda}/\tilde{F} < \Gamma < (\mu_1 + \tilde{\lambda})/\tilde{F}, \\ \mu_1, & \textit{при} \;\; \Gamma \ge (\mu_1 + \tilde{\lambda})/\tilde{F}, \end{cases} \tag{5.13}$$

где

$$\Gamma = \frac{\beta\gamma + \gamma - 1}{\beta + \gamma - 1}, \quad \tilde{F} = \lambda + \rho\frac{F}{1-F} + \frac{\theta}{1-\theta} \cdot \frac{\rho}{1-F}. \tag{5.14}$$

Можно также явно выписать оптимальный порог инвестирования (5.5) при оптимальных субсидиях $\pi^{**} = \pi^*(\mu^*)$.

Следствие 5.2. *Если $\rho = \rho_s$, то*

$$\pi^{**} = I\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\rho - \alpha}{1 - \gamma} \cdot \frac{(1-\theta)(1-F)}{\rho}\tilde{F} \cdot \varphi,$$

где

$$\varphi = \begin{cases} 1 - \tilde{\lambda}/\tilde{F}, & \textit{при} \;\; \Gamma \le \tilde{\lambda}/\tilde{F}, \\ \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\beta + \gamma - 1}, & \textit{при} \;\; \tilde{\lambda}/\tilde{F} < \Gamma < (\mu_1 + \tilde{\lambda})/\tilde{F}, \\ 1 - (\mu_1 + \tilde{\lambda})/\tilde{F}, & \textit{при} \;\; \Gamma \ge (\mu_1 + \tilde{\lambda})/\tilde{F}. \end{cases}$$

5.4. Модельный анализ оптимальных субсидий

В этом разделе мы исследуем, как влияют на оптимальные субсидии по кредиту μ^* и на оптимальный уровень инвестирования π^{**} (характеризующий время инвестирования проекта при оптимальной величине субсидий) различные параметры модели. Для некоторого упрощения выкладок ниже будем предполагать, что дисконты инвестора и государства одинаковы ($\rho = \rho_s$), хотя большинство выводов переносятся (возможно, в более громоздкой форме) и на случай различных дисконтов.

Представленные ниже выводы модельного анализа можно условно разделить на два типа. К одному из них можно отнести те, которые согласуются с экономической интуицией и дополняют ее определенными количественными оценками. Само наличие таких "интуитивно понятных" выводов дает возможность говорить о некой состоятельности ("адекватности") предложенной в данной работе модели. В то же время ряд других "качественных" выводов из модели, на наш взгляд, уже не слишком укладываются в привычные "интуитивные" рамки, что можно объяснить "немонотонным" характером установленных зависимостей между переменными.

Отсутствие субсидий. Как следует из доказанной выше Теоремы 5.1 (и Следствия 5.1), оптимальные субсидии будут нулевыми в том и только том случае, когда $\Gamma \leq \tilde{\lambda}/\tilde{F}$. Это условие можно переписать в следующем виде:

$$\gamma \leq \underline{\gamma} = \frac{\tilde{F} + \tilde{\lambda}(\beta - 1)}{\tilde{F}(\beta + 1) - \tilde{\lambda}}, \tag{5.15}$$

где $\tilde{F}$ определено в (5.14).

Тем самым при маленькой налоговой нагрузке государству невыгодно (с точки зрения бюджетного эффекта) предоставлять субсидии по кредиту. Отметим, что условие отсутствия субсидий (5.15) выполняется, если справедливо более "жесткое" условие $\gamma < 1/(\beta + 1)$. Последнее неравенство уже не зависит ни от доли собственных средств инвестора θ, ни от процента по кредиту λ, ни от потока кредитных платежей. С другой стороны, поскольку правая часть неравенства (5.15) убывает по $\tilde{F}$, а $\tilde{F} \geq \lambda + \rho F/(1-F)$, то при условии

$$\gamma \geq \frac{\widehat{\lambda} + \tilde{\lambda}\beta - \gamma_i \lambda_0}{\widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}\beta - \tilde{\lambda}}, \quad \text{где} \;\; \widehat{\lambda} = \lambda + \rho \frac{F}{1-F}, \tag{5.16}$$

оптимальные субсидии должны быть положительными.

Зависимость от налоговой нагрузки. Как видно из доказанной в предыдущем разделе Теоремы 5.1, величина оптимальных субсидий зависит от коэффициента налоговой нагрузки γ только через показатель b (определенный в (5.10) и (5.9)), причем, как нетрудно видеть, b возрастает по γ. Из явного выражения для оптимальных субсидий (см. п. 2 Теоремы 5.1) следует, что μ^* возрастает по b.

Таким образом, при маленькой налоговой нагрузке оптимальные субсидии равны нулю (см. предыдущий раздел об отсутствии субсидий), с увеличением γ оптимальные субсидии необходимо увеличивать. Наконец, при больших налоговых нагрузках $\gamma > \overline{\gamma}$ оптимальные субсидии должны равняться максимально возможной величине μ_1. Верхнюю границу $\overline{\gamma}$ вычисляется из Следствия 5.1:

$$\overline{\gamma} = \frac{\tilde{F} + (\mu_1 + \tilde{\lambda})(\beta - 1)}{\tilde{F}(\beta + 1) - \mu_1 - \tilde{\lambda}}. \tag{5.17}$$

Что касается зависимости оптимального уровня инвестирования π^{**} от γ, то она носит более сложный характер (см. Рисунок 5.1). Как видно из Следствия 5.2, в тех областях, где оптимальные субсидии лежат на границах своих возможных значений, т.е. в области $\{\gamma < \underline{\gamma}\} \cup \{\gamma > \overline{\gamma}\}$, уровень π^{**} возрастает по γ, а в области $\{\underline{\gamma} < \gamma < \overline{\gamma}\}$, где оптимальные субсидии лежат строго внутри области допустимых значений, π^{**} убывает по γ.

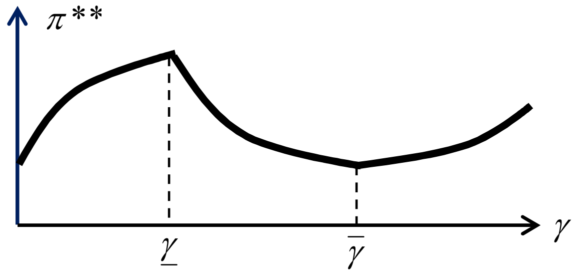


Рисунок 5.1. Зависимость оптимального уровня инвестирования от налоговой нагрузки

Объяснением такой "нестандартной" зависимости может, по-видимому, послужить тот факт, что при "крайних" величинах γ (очень больших или очень маленьких) увеличение налоговой нагрузки никак не влияет на оптимальные субсидии, и в этой ситуации инвестор откладывает инвестирование на более отдаленный момент. В то же время увеличение налоговой нагрузки при $\underline{\gamma} < \gamma < \overline{\gamma}$ вызывает увеличение оптимальных субсидий, что в свою очередь стимулирует более раннее инвестирование.

Зависимость от доли собственных средств инвестора. Как нетрудно видеть из Теоремы 5.1, зависимость оптимальных субсидий μ^* от собственных средств инвестора θ полностью определяется величиной $\frac{A}{1-\theta} = \frac{\theta}{1-\theta} + F + \lambda\frac{1-F}{\rho}$. Тем самым, оптимальный субсидируемый процент μ^* должен возрастать с ростом доли собственных средств инвестора, пока не сравняется с максимально возможным μ_1.

Если оптимальные субсидии меньше максимального допустимого уровня μ_1, то оптимальный уровень π^{**} будет убывать по θ (при выполнении условия $\rho + \tilde{\lambda} < \lambda$). Это означает, что пока оптимальные субсидии не достигли максимально допустимого значения, увеличение доли собственных средств инвестора ведет к более раннему инвестированию.

Зависимость от среднего темпа роста и волатильности прибыли. Оптимальная величина субсидий μ^* зависит от параметров прибыли (среднего темпа роста и волатильности) реализуемого инвестиционного проекта только через показатель β, определенный в 5.2. Из Следствия 5.1 нетрудно вывести, что оптимальные субсидии будут неубывающей функцией от β. С другой стороны, в силу Утверждения 1.4, β есть убывающая функция от α и σ. Таким образом, μ^* будет не возрастать при увеличении среднего темпа роста прибыли от проекта или ее волатильности. Поэтому для проектов с большой волатильностью или большим средним темпом роста государству выгодно (с точки зрения бюджетного эффекта) уменьшать размер оптимальных субсидий.

Оптимальный уровень инвестирования π^{**} будет убывающей функцией от

β (см. Следствие 5.2). Поэтому при увеличении волатильности прибыли момент инвестирования будет откладываться на более отдаленный срок.

Согласование интересов государства и инвестора. Аналогично формуле (5.9) для бюджетного эффекта можно получить следующее выражение для оптимального NPV инвестора $N(\mu) = \mathbf{E}(V_{\tau^*} - \theta I)e^{-\rho\tau^*}$ (как функции от величины субсидий μ):

$$N(\mu) = \begin{cases} \left[\frac{\beta}{\beta-1}h_0 - A + (1-\theta)c(\mu+\tilde{\lambda})\right] I, & \text{при } h \le h_0, \\ h_0^\beta \left[A - (1-\theta)c(\mu+\tilde{\lambda})\right]^{-\beta} I/(\beta-1), & \text{при } h > h_0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Отметим, что эта формула справедлива для не обязательно одинаковых дисконтов инвестора ρ и государства ρ_s.

Предположим, что оптимальные субсидии μ^* строго больше нуля. Тогда из формул (5.5), (5.18), (5.9) следует, что оптимальный уровень $\pi^*(\mu)$ убывает, а оптимальные NPV инвестора $N(\mu)$ и бюджетный эффект $B(\mu)$ возрастают (по μ) при $0 \le \mu \le \mu^*$. Это означает, что увеличение субсидий по кредиту (в пределах от 0 до μ^*) ведет к росту бюджетного эффекта, чистых приведенных доходов инвестора, а также к более раннему инвестированию проекта.

Поэтому область параметров модели, при которых $\mu^* > 0$, можно рассматривать, как область *согласования интересов* инвестора и государства. В этой области параметров увеличение субсидируемого процента (в определенных пределах) становится выгодным не только инвестору, но и государству, причем как с точки зрения бюджетного эффекта, так и с точки зрения более раннего инвестирования.

Как показано выше, область параметров модели, где $\mu^* > 0$, характеризуется соотношением $\gamma > \underline{\gamma}$, где $\underline{\gamma}$ определено в (5.15), а достаточным условием положительности оптимальных субсидий является неравенство (5.16).

Возможность подобного "согласования интересов" инвестора и государства согласуется с аналогичными эффектами, выведенными в предыдущих главах для механизмов налоговых каникул, ускоренной амортизации, а также государственного софинансирования инвестиционных проектов.

Глава 6. Моделирование механизма государственных гарантий по кредитам при инвестировании рискованных проектов

Настоящая глава посвящена применению изложенной выше общей схемы инвестиционных ожиданий к механизму государственных гарантий по кредиту для привлечения инвестиций на рискованные инвестиционные проекты.[24]

Под рискованным здесь понимается такой проект, который после инвестирования может (с какой-то вероятностью) потерпеть неудачу, так и не начиная свое функционирование. Для финансирования проекта инвестору необходимо взять кредит в банке. Поскольку у рискованного проекта существует вероятность невозврата кредита, соответствующая процентная ставка по кредиту может быть достаточно высокой, но банк готов ее уменьшить при снижении риска невозврата кредита. С целью снижения процентной ставки по кредиту и тем самым стимулирования инвестора государство гарантирует банку возврат (в случае неудачи проекта) определенной доли предоставленных проекту кредитов.

6.1. Механизм государственных гарантий по кредитам для инвестиционных проектов

Механизм государственных гарантий по возврату кредита закреплен в Бюджетном Кодексе РФ (статья 115 "Государственные и муниципальные гарантии").

Согласно этой статье государство (гарант) обеспечивает исполнение определенной части обязательств инвестора (принципала) перед кредитной организацией (бенефициаром) при наступлении гарантийного случая.

В федеральном бюджете государственные гарантии относятся к государ-

---

[24] Результаты главы опубликованы в [79], а также с соавтором в [12].

ственному внутреннему долгу (статья 15 Закона о федеральном бюджете).

Условия и порядок предоставления государственных гарантий устанавливаются государством, например, Постановлением Правительства РФ от 14.12.2010 № 1016, постановлениями на региональном и местном уровне, а также для отдельных отраслей.

Отбору подлежат инвестиционные проекты, имеющие общегосударственное (или региональное) значение и направленные на создание новых и/или реконструкцию существующих социальных, агропромышленных, промышленных, коммунальных и транспортных объектов и их последующую эксплуатацию, проекты в области энергосбережения и повышения энергетической эффективности в сфере ЖКХ и в сфере промышленности, а также проекты по развитию оборонно-промышленного комплекса РФ.

Согласно упомянутому выше Постановлению № 1016, к основным критериям отбора проектов относятся:

1) полная стоимость проекта[25] (ст. 3, пп. б,в,г);

2) доля собственных средств принципала при финансировании (ст. 3, пп. а,б,в);

3) общий объем государственной поддержки (ст. 3, п. а)).

Кроме того, при проведении отбора проектов указываются необходимый объем господдержки проекта (Приложение 1, ст. 1) и его обоснование с оценкой финансовой, бюджетной и экономической эффективности реализации проекта (Приложение 1, ст. 8). Конкретные величины указанных показателей достаточно сильно меняются в зависимости от направленности проекта и даже региона, в котором его планируется осуществлять. Доля возврата кредита может доходить до 100% от основного долга (например, для проектов в рамках программы развития оборонно-промышленного комплекса).

Опыт государственных гарантий по кредитам в России и за рубежом. В России предоставление гарантий для эффективных инвестиционных проектов началось в середине 1990-х гг. В это время в рамках ре-

---

[25] Полная стоимость проекта определяется в Постановлении как сумма капитальных затрат, связанных с созданием, модернизацией или реконструкцией объекта, осуществляемых в рамках реализации проекта

гиональных программ поддержки предпринимательства стали формироваться первые гарантийные фонды, а создание гарантийных механизмов кредитно-инвестиционной поддержки малых предприятий выделялось в качестве одной из основных форм финансовой поддержки бизнеса, тем более, что риски в те годы были достаточно высоки. Гарантии региональных фондов предоставлялись в виде поручительств по обеспечению исполнения обязательств, при этом уровень поручительств устанавливался на уровне 50–70% от основной суммы кредита. Подробнее о гарантийных фондах в России конца 1990-х — начала 2000-х годов см., например, [41].

Во время финансового кризиса 2008–09 гг. государство предложило ряд дополнительных мер по компенсации рисков банков в части инвестирования в реальный сектор. Оно гарантировало банкам возврат половины суммы выданного кредита (без комиссий, процентов и прочих платежей). Однако на практике такой инструмент оказался невостребованным в силу весьма сложной процедуры получения гарантий и отсутствия перспективы возврата оставшейся половины суммы кредита [64].

В законе о федеральном бюджете РФ на 2013 год были предусмотрены государственные гарантии по кредитам на осуществление инвестиционных проектов на общую сумму 2.4 млрд долл. США (Приложение 41 п. 3). Среди этих проектов — программа "Сухой Суперджет 100", проекты по созданию туристического кластера в Северо-Кавказском регионе. Функции агента Правительства РФ по вопросам предоставления и исполнения государственных гарантий по кредитам на осуществление отобранных инвестиционных проектов были возложены на Внешэкономбанк.

Предоставление гарантий через различные фонды носит, как правило, коммерческий характер: за гарантию взимается определенная "плата" независимо от наступления гарантийного случая, обычно составляющая несколько процентов от общей суммы займа. Причем эту плату фонды могут получать как от инвестора (принципала), так и от кредитной организации (банка).

За рубежом гарантирование — одна из популярных форм поддержки предпринимательства на случай неудачи в реализации инновационных проектов субъектами среднего и малого бизнеса.

Так, Администрация по делам малого бизнеса (АМБ) США предлагает гарантию займов на создание и развитие малых венчурных фирм в размере 75% от их суммы; подобная программа существует и в Канаде — там аналогичные гарантии могут покрывать до 90% суммы займа. Финансирование АМБ осуществляется со стороны Конгресса США на предоставление гарантий по займам. Частные банки осуществляют кредитование проектов под гарантии Федерального правительства. В качестве своеобразной платы за гарантию АМБ получает от банка 1% суммы займа.

В Европе одним из основных финансовых институтов, осуществляющих поддержку малого и среднего бизнеса, является Европейский Инвестиционный Фонд (ЕИФ). Этот фонд обеспечивает гарантирование, в первую очередь, через страхование кредитов и гарантий, выданных другими финансовыми институтами. ЕИФ как правило гарантирует до 50% займа, выдаваемого банком, что позволяет сокращать риск предоставления кредитов и соответственно снижает процент по кредиту.

Подробный обзор существующих систем предоставления гарантий для получения кредитов инвестиционным проектам малого бизнеса можно найти, например, в [41, 92].

Некоторые работы по моделированию механизма гарантий. Что касается модельного анализа механизма гарантий, то работ, в которых оцениваются объем гарантий и размер "платы" за них (гарантийным фондам), с одной стороны, довольно много, а с другой, большинство из них лежат совсем в другом русле, нежели модель, рассматриваемая в настоящей главе. Поэтому остановимся лишь на некоторых, которые в каких-то аспектах близки к предлагаемой ниже модели.

В работе [41] схема предоставления гарантий по кредитам для инвестиционного проекта рассматривалась как игровая ситуация, в которой участвуют инвестор проекта (принципал), банк (кредитор) и гарант (гарантийный фонд).

Каждый из участников имеет свои собственные интересы и ограничения.

Инвестор стремится снизить процентную ставку, банк стремится максимизировать свою прибыль от сделки, или по крайнем мере, получить доходность сделки не ниже некоторой средней доходности капитала, имеющейся на финансовом рынке, а гарант — выбрать такую плату за гарантию, чтобы по крайней мере не остаться банкротом после проведения гарантийной операции. Автор рассматривает простую одношаговую схему определения величины платы за предоставление гарантии (точнее, ее нижней границы) для трех вариантов целевых установок гаранта: 1) ожидаемый капитал гаранта после проведения гарантийной операции не должен стать отрицательным ("отсутствие банкротства"); 2) ожидаемый капитал гаранта после проведения операции должен стать не меньше, чем до проведения операции ("сохранение капитала"); 3) ожидаемый капитал гаранта после проведения операции должен прирасти не меньше, чем по ставке рефинансирования ЦБ ("приумножение капитала").

Любопытный подход к интерпретации механизма гарантии в рамках теории финансовых опционов был предложен Р. Мертоном [144]. Так, предоставление банком кредита можно рассматривать, как обязательство (со стороны фирмы, берущей кредит) выплатить банку через определенное время T фиксированную сумму долга D (ради простоты предполагается, что весь долг выплачивается один раз по окончании срока кредита). Считается, что при этом фирма расплачивается своими активами, которые эволюционируют (во времени) как некоторый случайный процесс. В силу этого активы фирмы к моменту погашения кредита T могут оказаться меньше суммы долга, тем самым возникает вероятность дефолта (невозврата кредита). В этих рамках гарантию на возврат кредита можно рассматривать как опцион европейского типа, дающий право на приобретение данного актива по цене, равной сумме долга D, и временем исполнения, равным сроку погашения кредита T. При таком подходе в качестве платы за гарантию можно взять цену опциона, которая вычисляется, например, в случае, когда активы следуют процессу геометрического броуновского движения, по известной формуле Блэка–Шоулза. Такой "опционный" подход получил развитие в ряде других работ, например, [137].

Дальнейшая структура главы выглядит следующим образом. В разделе

6.2 описывается вариант базовой модели инвестиционных ожиданий, в рамках которого проводится исследование механизма государственных гарантий по кредитам для рискованных инвестиционных проектов. Постановка возникающей в этой модели оптимизационной задачи приводится в разделе 6.3. Отметим, что в отличие от описанной в главе 2 двухуровневой схемы, оптимизационная задача в данной главе является трехуровневой, поскольку возникает третий участник модели — банк, имеющий свои собственные интересы от кредитования инвестиционного проекта. Решение этой задачи изложено в разделе 6.4. Модельный анализ полученных результатов и их экономическая интерпретация приведена в разделе 6.5.

6.2. Базовая модель

Общая схема рассматриваемой модели описывается следующим образом.

Имеется некоторый инвестиционный проект, который по истечении определенного промежутка времени после финансирования (лага) может начать приносить поток прибыли. Проект, однако, является рискованным, т.е. после финансирования он может с какой-то вероятностью потерпеть неудачу, так и не начиная функционировать (или даже будучи формально запущенным, просуществовать очень короткое время). Возможными причинами неудачи проекта могут быть как резкие изменения экономической ситуации (в частности, спроса) после инвестирования, так и ошибки в самом проекте.[26]

Для финансирования проекта инвестору необходимо взять кредит в банке. При этом в случае неудачи проекта кредит не возвращается (дефолт инвестора).

Поскольку у рискованного проекта существует вероятность невозврата кредита, соответствующая процентная ставка по кредиту может быть достаточно высокой, но банк готов ее уменьшить при условии, что кредит будет ему возвращен (хотя бы частично).

С целью снижения процентной ставки по кредиту и тем самым стимули-

---

[26] Одним из самых неудачных российских проектов многие считают проект создания гибридного "народного автомобиля" (Ё-мобиль), заявленного в 2010 г. и закрытого в 2014 г., который так и не дошел до серийного производства. Еще одним "провалом" называют проект производства поликристаллического кремния для солнечных батарей ("Усолье-Сибирский силикон").

рования инвестора государство гарантирует банку возврат (в случае неудачи проекта и дефолта инвестора) определенной доли предоставленного проекту кредита.

Инвестиционный проект. Пусть I есть объем инвестиций, необходимых для финансирования проекта, а h — длительность лага капитальных вложений (т.е. интервал времени между началом финансирования[27] и началом получения прибыли, в дальнейшем будем называть его просто лагом). Поскольку при наличии лага капитальных вложений необходимо учитывать эффекты, связанные с возвратом НДС (см. главу 1), будем считать в данной главе, что НДС включен в объем инвестиций I.

Проект является рискованным в том смысле, что после инвестирования и лага он с вероятностью q, $0 < q < 1$, терпит неудачу и остается нереализованным, а с дополнительной вероятностью $1 - q$ начинает свое функционирование и приносит некий поток прибыли. Срок жизни проекта для простоты считается бесконечным, а прибыль описывается случайным процессом.

Как и в описанной ранее модели инвестиционных ожиданий принципиальным в данной модели является предположение о "свободе выбора" для инвестора, т.е. в каждый момент времени инвестор может либо сделать вложения в проект, либо отложить решение об инвестировании до наступления более благоприятной ситуации (связанной с ценами на затрачиваемые ресурсы и выпускаемую продукцию, спросом и т.д.). При этом само решение принимается на основе наблюдаемой информации о рыночных ценах, а реализация проекта не меняет эти рыночные цены.

Пусть τ обозначает момент инвестирования проекта.

Финансирование. Финансирование проекта предполагается смешанным. Это означает, что доля μ необходимых инвестиций I берется в кредит в банке, остальная часть $(1 - \mu)I$ — собственные средства инвестора, при этом момент получения кредита совпадает с моментом инвестирования проекта τ.

---

[27] Ради простоты будем считать, что инвестиции носят единовременный характер

В момент окончания лага $\tau + h$ становится известной дальнейшая судьба проекта.

Если проект начинает функционировать, то возврат самого кредита и начисленных по нему процентов начинается сразу после окончания лага, т.е. в момент $\tau + h$.

В случае, когда проект после финансирования остается нереализованным (терпит неудачу), кредит инвестором не возвращается, однако банк получает от государства компенсацию (гарантированный возврат) в виде доли θ от суммы выданного кредита, т.е. $\theta\mu I$. Отметим, что по окончании лага результатом сделанных инвестиций являются некоторые активы (построенные здания, закупленное оборудование и т.д.). При этом в случае дефолта инвестора эти активы могут быть реализованы, а выручка от реализации (как правило, меньше вложенных средств) может пойти на возмещение либо убытков банка (от невозврата кредита), либо регрессных требований по гарантии, если они предусмотрены. Однако, в данной главе предполагается, что при дефолте инвестора банк получает компенсацию своих убытков по государственной гарантии, а регрессные требования к инвестору со стороны государства отсутствуют. Тем самым выручка от реализации созданных после инвестирования активов в случае дефолта инвестора в данной модели не рассматривается.

Кредитная политика банка (по отношению к данному инвестиционному проекту), как и в предыдущей главе, описывается в модели набором $\{L,\ \lambda,\ (f_t)\}$, где L — срок кредита, λ — процент по кредиту, $f_t \geq 0,\ 0 \leq t \leq L$ — график возврата основного тела кредита (без учета процентов) на единицу кредита (плотность потока кредитных платежей): $\displaystyle\int_0^L f_t dt = 1$.

Зная кредитную политику банка, можно подсчитать общие выплаты инвестора по кредиту (включая основные выплаты и проценты), приведенные к моменту кредитования τ, приходящиеся на единицу кредита. В то же время для банка эта величина представляет собой выплаты банку за единицу выданного (под проект) кредита, приведенные с помощью соответствующей нормы дисконта к моменту кредитования.

Для описанной выше схемы возврата величина приведенных общих выплат по кредиту (на единицу кредита) равна

$$k_\tau = \lambda h e^{-\rho h} + \int_{\tau+h}^{\tau+L} \left(f_{t-\tau} + \lambda r_{t-\tau}\right) e^{-\rho(t-\tau)} dt, \tag{6.1}$$

где $r_t = \displaystyle\int_t^L f_s ds$ — остаточный долг по кредиту (на единицу кредита) через время t после начала кредитных выплат, ρ — коэффициент дисконтирования. Обозначая $M = \displaystyle\int_h^L f_t e^{-\rho t} dt$, из (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} k_\tau &= \lambda h e^{-\rho h} + M + \lambda \int_h^L \left(\int_t^L f_s ds \right) e^{-\rho t} dt = \\ &= \lambda h e^{-\rho h} + M + \lambda \int_h^L f_s \left(\int_h^s e^{-\rho t} dt \right) ds = \lambda h e^{-\rho h} + M + \lambda (e^{-\rho h} - M)/\rho = \\ &= \lambda h e^{-\rho h} + e^{-\rho h} + (\lambda/\rho - 1)(e^{-\rho h} - M). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что кредитная политика политика банка не зависит от момента кредитования τ. Отсюда следует, что $M = \displaystyle\int_{\tau+h}^{\tau+L} f_t e^{-\rho(t-\tau)} dt = \int_h^L f_t e^{-\rho t} dt$ не зависит от τ. Поэтому величина k_τ также не зависит от момента кредитования, в дальнейшем будем обозначать ее просто k, опуская индекс τ.

Отметим, что величина k зависит от коэффициента дисконтирования ρ, т.е. $k = k(\rho)$. Зависимость этой величины от процента за кредит λ описывается следующим линейным соотношением:

$$k = k(\rho; \lambda) = d_1(\rho)\lambda + d_2(\rho), \tag{6.3}$$

$$\text{где} \quad d_2(\rho) = \int_h^L f_t e^{-\rho t} dt, \quad d_1(\rho) = h e^{-\rho h} + \left(e^{-\rho h} - d_2(\rho)\right)/\rho. \tag{6.4}$$

6.3. Постановка оптимизационной задачи

Перейдем к описанию агентов, связанных с реализацией описанного выше инвестиционного проекта. К ним мы относим:

1) инвестора, финансирующего проект и получающего прибыль от его реализации;

2) банк, предоставляющий инвестору кредит (на определенных условиях);

3) государство, гарантирующее банку возврат определенной доли кредита в случае неудачи проекта (дефолта инвестора).

Общая схема взаимодействия агентов изображена на Рисунке 6.1.

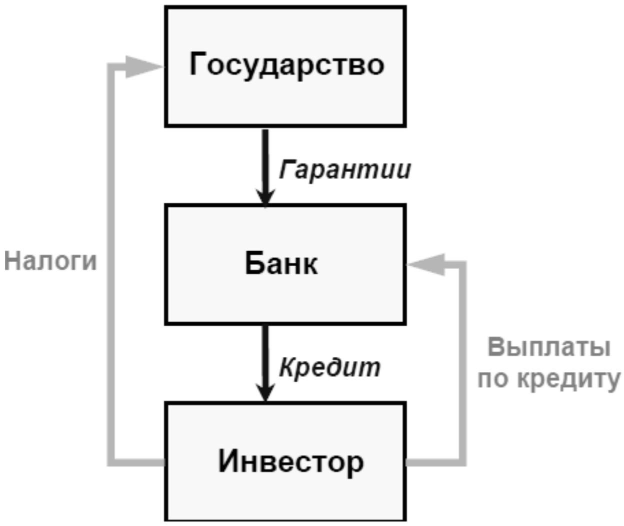


Рисунок 6.1. Общая схема взаимодействия по инвестиционному проекту

Опишем более подробно каждого из участников.

Инвестор. Как уже говорилось, в случае успешной реализации проект начинает (после окончания лага капитальных вложений) приносить некоторый случайный поток "прибыли". В данной работе под прибылью будет пониматься валовая выручка за вычетом материальных затрат и оплаты труда, что, по-существу, близко к показателю EBITDA (прибыль до вычета расходов по уплате процентов, налогов и начисленной амортизации). Эта прибыль в момент времени $t \geq \tau + h$ (для проекта, инвестированного в момент τ) моделируется с помощью семейства случайных процессов $(\pi_t^\tau,\ t \geqslant \tau + h,\ \tau \geqslant 0)$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}, \mathbf{P})$ и согласованных с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ ("историей" системы до момента t).

Налоговая система в модели представлена коэффициентом γ налоговой нагрузки на проект, т.е. отношением всех налогов от реализации проекта к прибыли (EBITDA). Предполагается, что этот коэффициент постоянен во времени. Как уже отмечалось в главе 1, по окончании лага капитальных вложений инвестор имеет право на возмещение (из бюджета) НДС, уплаченного при строительстве и приобретении объектов, необходимых по проекту. В модели предполагается, что в случае реализации проекта возврат НДС происходит в момент окончания лага $\tau + h$, а в случае дефолта инвестора возврата вообще не происходит[28].

Поведение инвестора характеризуется моментом инвестирования τ (марковским моментом относительно потока $\mathcal{F}_t$).

В качестве целевой функции (критерия) инвестора рассматривается чистая прибыль инвестора от реализованного проекта, приведенная к нулевому моменту времени (NPV):

$$\begin{aligned} N(\tau,\lambda) = \mathbf{E}\Bigg[&(1-q)\int_{\tau+h}^{\infty}(1-\gamma)\pi_t^{\tau}e^{-\rho_i t}dt - (1-q)\mu k(\rho_i;\lambda)Ie^{-\rho_i\tau}+ \\ &+(1-q)\gamma_0 Ie^{-\rho_i(\tau+h)} - (1-\mu)Ie^{-\rho_i\tau}\Bigg] \\ &= \mathbf{E}[(1-q)(Y_\tau^i + \gamma_0 Ie^{-\rho_i h}) - (1-\mu)I]e^{-\rho_i\tau}, \end{aligned} \qquad (6.5)$$

где τ — момент инвестирования, γ_0 — доля возвращаемого НДС в инвестициях I,[29] ρ_i — ставка дисконтирования для инвестора, $k(\rho_i;\lambda)$ — общие приведенные выплаты инвестора по кредиту (см. выше), а

$$Y_\tau^i = (1-\gamma)X_\tau^i - \mu k(\rho_i;\lambda)I, \quad X_\tau^i = \mathbf{E}\left(\int_{\tau+h}^{\infty}\pi_t^{\tau}e^{-\rho_i(t-\tau)}dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right) - \qquad (6.6)$$

есть ожидаемая (при данной текущей ситуации к моменту инвестирования τ) будущая интегральная прибыль от проекта, приведенная к моменту τ.

Банк. При определении кредитной политики банк руководствуется следующим критерием ожидаемого "эффекта" банка от кредитования данного инвестиционного проекта:

$$C(\lambda,\theta,\tau) = \mathbf{E}\left[(1-q)\mu k(\rho_b;\lambda)I + q\theta\mu Ie^{-\rho_b h} - \mu I\right]e^{-\rho_b\tau}, \qquad (6.7)$$

где ρ_b — ставка дисконтирования для банка (которая может отличаться от ставки ρ_i для инвестора), $k(\rho_b;\lambda)$ есть приведенные (со ставкой банка) выплаты банку, приходящиеся на единицу кредита, выданного на инвестиционный проект,

---

[28] Можно считать, что невозврат НДС в случае дефолта инвестора входит (наряду с возможными регрессными требованиями) в условия предоставления госгарантий при наступлении гарантийного случая.

[29] Если весь НДС возвращается, то $\gamma_0 = \gamma_{\text{НДС}}/(1+\gamma_{\text{НДС}})$.

θ — доля возврата кредита в случае дефолта инвестора, вероятность которого равна q. Этот критерий представляет собой разность между ожидаемыми доходами банка от кредитования проекта (в случае реализации проекта это — общие выплаты инвестора по кредиту, приведенные с помощью дисконта банка, а в случае дефолта инвестора — сумма, возвращаемая по государственной гарантии) и суммой выданного кредита. Другие показатели, связанные с обслуживанием кредита, в данной модели не рассматриваются.

Достаточно естественным представляется условие, что процент по кредиту λ должен быть не меньше некоторой заданной величины: $\lambda \geq \lambda_0$.

Государство. Рычагом воздействия государства на банк, а через него на инвестора, является величина государственных гарантий по возврату кредита в случае дефолта инвестора, точнее доля возврата θ от исходной суммы кредита.

Для сравнения различных вариантов государственных гарантий по кредиту используется критерий бюджетного эффекта, который в данном случае представляет собой разность ожидаемых налоговых поступлений в бюджет от реализованного проекта (с учетом возмещения инвестору НДС) и ожидаемых затрат государства по возврату банку соответствующей доли θ выданного кредита, приведенных к нулевому моменту времени:

$$\begin{aligned} B(\theta,\tau) &= \mathbf{E}\left[(1-q)\int_{\tau+h}^{\infty}\gamma\pi_t^{\tau}e^{-\rho_s t}dt-(1-q)\gamma_0 Ie^{-\rho_s(\tau+h)}-q\theta\mu Ie^{-\rho_s(\tau+h)}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(1-q)\gamma X_{\tau}^{s}-\left[(1-q)\gamma_0+q\theta\mu\right]Ie^{-\rho_s h}\right]e^{-\rho_s\tau}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где τ есть момент инвестирования проекта, ρ_s — ставка дисконтирования для государства (вообще говоря, отличающаяся от ставок инвестора и банка), а

$$X_{\tau}^{s}=\mathbf{E}\left(\int_{\tau+h}^{\infty}\pi_t^{\tau}e^{-\rho_s(t-\tau)}dt\,\middle|\,\mathcal{F}_{\tau}\right). \tag{6.9}$$

На допустимые доли возврата кредита накладываются дополнительные условия в виде верхней и нижней границы: $\Theta=\{\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta}\}$. Эти границы могут быть связаны, например, с законодательными рамками или приоритетами государства.

Оптимизационная задача. Как мы видели выше, каждый из трех участников в нашей модели (инвестор, банк, государство) имеет свои собственные интересы в инвестиционном проекте, определяемые формулами (6.5)–(6.8). При этом критерии каждого участника зависят не только от его собственного решения, но и от решений других участников. Сами участники, однако, не равноправны, а расположены как бы на трех уровнях.

На самом низком уровне находится инвестор, который, зная принятое банком решение об условиях кредитования проекта, определяет оптимальный (при данных условиях) момент инвестирования.

Промежуточное место занимает банк — по доле возврата кредита (назначаемой государством) и оптимальном решении инвестора он выбирает оптимальную процентную ставку по кредиту для проекта.

Наконец, на самом верхнем уровне находится государство, которое знает оптимальные решения участников нижних уровней в зависимости от назначаемой доли возврата кредита. На основе этой информации государство выбирает оптимальную для него долю возврата кредита.

Опишем эту трехуровневую задачу оптимизации более формально.

Инвестор. Для произвольного (допустимого) процента по кредиту $\lambda \geq \lambda_0$ инвестор выбирает оптимальный момент инвестирования $\tau^*(\lambda)$ как решение следующей задачи:

$$N(\tau, \lambda) \to \max_{\tau}, \tag{6.10}$$

где максимум берется по всем марковским моментам τ.

Банк. Зная зависимость оптимального поведения инвестора $\tau^*(\lambda)$ от процента λ, банк выбирает оптимальный процент по кредиту (для данного проекта) $\lambda^*(\theta)$ для произвольной доли гарантированного возврата по кредиту θ, как решение задачи банка:

$$C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda)) \to \max_{\lambda \geqslant \lambda_0}. \tag{6.11}$$

Государство. Зная оптимальный процент по кредиту для проекта $\lambda^*(\theta)$ и соответствующее оптимальное поведение инвестора $\tau^*(\lambda^*(\theta))$, государство определяет оптимальную долю возврата по кредиту θ^* как решение бюджетной задачи:

$$B(\theta, \tau^*(\lambda^*(\theta))) \to \max_{\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}} . \tag{6.12}$$

Тройку $(\theta^*, \lambda^*(\theta^*), \tau^*(\lambda^*(\theta^*)))$ можно рассматривать как вариант равновесия по Штакельбергу в иерархической трехуровневой игре "государство–банк–инвестор".

6.4. Решение трехуровневой задачи оптимизации

В этом разделе будет доказана теорема существования решения сформулированной выше трехуровневой оптимизационной задачи.

6.4.1. Математические предположения

Сформулируем, прежде всего, математические предположения, необходимые для дальнейшего анализа.

Заметим, что в приведенных выше критериях инвестора (6.5) и государства (6.8) участвуют не собственно поток прибыли от реализованного проекта π_t^τ, а ожидаемые приведенные (со своими дисконтами) будущие интегральные прибыли от проекта X_τ^i и X_τ^s (см. (6.6) и (6.9) соответственно). В силу этого обстоятельства в общей ситуации мы будем делать предположения не относительно потока прибыли (семейства случайных процессов π_t^τ), а сразу относительно процессов X_τ^i и X_τ^s. Отдельно будет рассмотрен случай процессов типа геометрического броуновского движения.

Итак, пусть $X_t^i,\ t \geq 0$ есть диффузионный процесс со значениями в интервале (l, r) (где $-\infty \leq l < r \leq \infty$), описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t^i = a(X_t^i)dt + \sigma(X_t^i)dw_t, \quad X_0^i = x_0, \tag{6.13}$$

где $(w_t,\ t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а $a(x)$ и $\sigma(x)$ есть функции сноса и диффузии, соответственно.

Предполагается, что для любой точки $x \in (l, r)$ выполнено следующее условие локальной интегрируемости:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1+|a(y)|}{\sigma^2(y)} dy < \infty \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0. \tag{6.14}$$

Это условие гарантирует существование слабого решения уравнения (6.13), а также его регулярность, т.е. из любой точки интервала (l, r) процесс попадает в любую другую точку этого интервала за конечное время с положительной вероятностью. Граничные точки области значений l и r предполагаются естественными границами, т.е. они не достигаются процессом, начинающимся внутри области значений, за конечное время (с вероятностью 1). Более подробно о диффузионных процессах см., например [30].

Если выполнено условие (6.14), то существуют единственные (с точностью до положительного множителя) возрастающая и убывающая функции $\psi_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ (соответственно) с абсолютно непрерывными производными, которые являются фундаментальными решениями дифференциального уравнения

$$a(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) = \rho_i f(x) \tag{6.15}$$

почти всюду (по мере Лебега) на интервале (l, r) (см., например [135, Lemma 5.26]).

Будем обозначать $\psi_b(x)$ и $\psi_s(x)$ — возрастающие решения вариантов уравнения (6.15), где в правой части вместо ρ_i стоят ρ_b и ρ_s соответственно.

Определим при $l/I < p < r/I$ функцию $F(p) = p - \tilde{\psi}_i(p)/\tilde{\psi}_i'(p)$, где $\tilde{\psi}_i(p) = \psi_i(pI)$. Будем предполагать, что эта функция удовлетворяет следующему условию:

(A) $F(p)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{p \to r/I} F(p) = \infty$.

Обозначим $k^i(\lambda) = \mu k(\rho_i; \lambda) - \gamma_0 e^{-\rho_i h} + (1-\mu)/(1-q)$, где $k(\rho_i; \lambda)$ определено в (6.3)–(6.4). Теперь можно при $\lambda \geq \lambda_0$ корректно определить функции

$$\xi(\lambda) = \psi_b\left(F^{-1}\left(\frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma}\right)I\right), \quad G(\lambda) = \lambda - \xi(\lambda)/\xi'(\lambda). \tag{6.16}$$

Поведение функции G будет предполагаться аналогичным поведению функции F:

(B) $G(\lambda)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} G(\lambda) = \infty$.

Кроме того, нам понадобится следующее ограничение на рост функции сноса процесса X_t^i:

(C) $a(pI) \le \rho_i\big[p - k^i(\lambda)/(1{-}\gamma)\big]I \quad$ при $p > F^{-1}\left(\dfrac{k^i(\lambda)}{1{-}\gamma}\right)$ и $\lambda \ge \lambda_0$.

Сделаем еще предположение относительно начального значения процесса $X_0^i = x_0$:

(D) $(1-\gamma)x_0 \leqslant k^i(\lambda_0)I$.

Заметим, что из (6.5)–(6.6) выводится:

$$N(0,\lambda_0) = (1-q)(1-\gamma)X_0^i - (1-q)\mu k(\rho_i;\lambda_0) + (1-q)\gamma_0 I e^{-\rho_i h} - (1-\mu)I = \\ = (1-q)\left[(1-\gamma)x_0 - k^i I\right].$$

Поэтому условие **(D)** означает, что инвестиционный проект будет иметь неположительный NPV при инвестировании в нулевой момент времени даже при минимальном допустимом проценте за кредит λ_0, т.е. проект не будет эффективным (по критерию NPV) в нулевой момент времени. При выполнении этого условия оптимальный момент инвестирования заведомо не будет нулевым (с вероятностью 1).

Наконец, еще одно условие касается связи процессов X_t^i и X_t^s, определенных в (6.6) и (6.9) соответственно, и представляющих собой ожидаемые будущие интегральные прибыли от реализованного проекта, но приведенные с разными ставками дисконтирования (ρ_i и ρ_s). Будем предполагать, что между этими процессами имеется функциональная связь.

(E) Существует непрерывная функция $H(x)$, такая что $X_t^s = H(X_t^i)$ при всех $t \ge 0$ (с вероятностью 1).

Дадим несколько комментариев по поводу этого условия. Прежде всего, в случае одинаковых ставок инвестора и государства процессы X_t^i и X_t^s совпадают, и данное условие, очевидно, выполнено для любого процесса прибыли.

Приведем одно достаточное условие для выполнения **(E)**. Пусть процесс прибыли π_t^τ, $t \ge \tau + h$ обладает следующим свойством: существует функция

$f(\pi, t)$, такая что для любого марковского момента τ и $t > h$

$$\mathbf{E}\left(\pi^{\tau}_{\tau+t} \middle| \mathcal{F}_{\tau}\right) = f(\pi^{\tau}_{\tau}, t). \tag{6.17}$$

Утверждение 6.1. *Пусть выполнено (6.17), а функция $f(\pi, t)$ удовлетворяет следующим двум предположениям:*

1) $f(\pi, t)$ монотонно возрастает по π при любом $t \geq h$;

2) семейство $\{f(\pi, t)/v(t),\ t \geq h\}$ равностепенно непрерывно по π для некоторой функции $v(t)$ такой, что $\int_h^\infty v(t)e^{-\rho_s t}dt < \infty$.

Тогда справедливо условие **(E)**.

Доказательство. Из условий 1) и 2) нетрудно вывести, что функции $f_i(\pi) = \int_h^\infty f(\pi, t)e^{-\rho_i t}dt$ и $f_s(\pi) = \int_h^\infty f(\pi, t)e^{-\rho_s t}dt$ будут непрерывными и возрастающими.

Из (6.17) следует:

$$X^i_t = \int_{t+h}^\infty \mathbf{E}\left(\pi^t_{t+s} \middle| \mathcal{F}_t\right) e^{-\rho_i(s-t)}ds = \int_h^\infty f(\pi^t_t, s)e^{-\rho_i s}ds = f_i(\pi^t_t).$$

Аналогично,

$$X^s_t = \int_h^\infty f(\pi^t_t, u)e^{-\rho_s u}du = f_s(\pi^t_t) = f_s(f_i^{-1}(X^i_t)),$$

тем самым условие **(E)** выполняется с функцией $H(x) = f_s(f_i^{-1}(x))$. □

Отметим, что монотонность функции $f(\pi, t)$ по π можно интерпретировать как возрастание ожидаемого потока прибыли при увеличении начального значения прибыли в момент инвестирования.

В следующем разделе мы покажем, что приведенные здесь условия выполняются для процессов типа геометрического броуновского движения.

Случай геометрического броуновского движения. Остановимся более подробно на случае, когда поток прибыли от реализованного проекта $\pi^\tau_t = \pi_t$ не зависит от момента инвестирования τ и задается геометрическим броуновским движением с параметрами (α, σ)

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha dt + \sigma dw_t), \quad \pi_0 \text{ — задано.} \tag{6.18}$$

(предполагается, что $\alpha < \rho_i$, т.к. в противном случае задача инвестора не имеет решения — ему выгодно откладывать момент инвестирования как можно дальше (до бесконечности)).

В случае геометрического броуновского движения (6.18) возрастающее решение ОДУ (6.15) имеет вид: $\psi_i(x) = x^{\beta_i}$, где β_i есть положительный корень квадратного уравнения

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho_i = 0. \tag{6.19}$$

Аналогично, $\psi_b(x) = x^{\beta_b}$, $\psi_s(x) = x^{\beta_s}$, где β_b, β_s — положительные корни уравнения (6.19) с заменой ρ_i на ρ_b и ρ_s соответственно.

Нетрудно подсчитать, что в рассматриваемом здесь случае

$$F(p) = \frac{\beta_i - 1}{\beta_i} p, \quad G(\lambda) = \frac{\beta_b - 1}{\beta_b}\lambda - \frac{1}{\beta_b d_1^i}\left[d_2^i + \frac{1-\mu}{\mu(1-q)} - \frac{\gamma_0 e^{-\rho_i h}}{\mu}\right],$$

где величины $d_1^i = d_1(\rho_i)$, $d_2^i = d_2(\rho_i)$ определены в (6.4). Тем самым условия **(A)** и **(B)**, очевидно, выполняются.

Что касается условия **(C)**, то заметим прежде всего, что

$$a(pI) = \alpha pI \le \rho_i\left(p - \frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma}\right) I \quad \text{при} \quad p \ge p_0 = \frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma}\cdot\frac{\rho_i}{\rho_i - \alpha}.$$

Из уравнения (6.19) следует, что $\beta_i < \rho_i/\alpha$, поэтому

$$F^{-1}\left(\frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma}\right) = \frac{\beta_i}{\beta_i - 1}\cdot\frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma} > \frac{\rho_i}{\rho_i-\alpha}\cdot\frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma} = p_0,$$

что показывает справедливость условия **(C)**.

Для геометрического броуновского движения (6.18) и $\alpha < \min(\rho_i, \rho_s)$ процессы

$$X_t^i = \pi_t \int_h^\infty e^{\alpha s} e^{-\rho_i s} ds = \pi_t e^{-(\rho_i - \alpha)h}/(\rho_i - \alpha), \quad X_t^s = \pi_t e^{-(\rho_s-\alpha)h}/(\rho_s - \alpha)$$

также являются процессами геометрического броуновского движения с параметрами (α, σ), связанными между собой линейным соотношением

$$X_t^s = X_t^i \cdot e^{(\rho_i - \rho_s)h}\cdot\frac{\rho_i - \alpha}{\rho_s - \alpha},$$

тем самым условие **(E)** выполняется.

Случай, когда прибыль π_t^τ имеет мультипликативную структуру, описанную в разделе 6.1 главы 1 (см. формулу (1.17)), сводится к уже разобранному выше случаю геометрического броуновского движения. В самом деле, из Утверждения 1.2 вытекает, что

$$X_t^i = \int_h^\infty \mathbf{E}\left(\pi_{t+s}^t \middle| \mathcal{F}_t\right) e^{-\rho_i s} ds = \pi_t \int_h^\infty c_s e^{-\rho_i s} ds,$$

где коэффициенты c_s определены в (1.24). Аналогичная формула справедлива и для X_t^s. Таким образом, процессы X_t^i и X_t^s также образуют геометрические броуновские движения (более того, отличаются друг от друга постоянным детерминированным множителем) и для них, как уже установлено, условия **(A)**–**(C)** и **(E)** выполняются.

6.4.2. Теорема существования

Основной результат этого раздела — существование решения в сформулированной выше трехуровневой задачи оптимизации (6.10)–(6.12).

Теорема 6.1. *Если выполнены условия* **(A)**–**(E)**, *то существует решение трехуровневой задачи оптимизации* (6.10)–(6.12), *т.е. найдутся функции* $p^*(\lambda)$, $\lambda^*(\theta)$ *и число* θ^* *такие, что:*

$$\tau^*(\lambda) = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}}\, N(\tau, \lambda) = \min\{t \geq 0 : X_t^i \geq p^*(\lambda) I\}, \tag{6.20}$$

$$\lambda^*(\theta) = \underset{\lambda \geqslant \lambda_0}{\operatorname{argmax}}\, C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda)), \tag{6.21}$$

$$\theta^* = \underset{\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}}{\operatorname{argmax}}\, B(\theta, \tau^*(\lambda^*(\theta))). \tag{6.22}$$

При этом имеет место следующее представление решения:

$$p^*(\lambda) = F^{-1}\left(\frac{k^i(\lambda)}{1-\gamma}\right), \tag{6.23}$$

$$\lambda^*(\theta) = \begin{cases} \lambda_0, & \textit{если } \ d_1^b G(\lambda_0) \geq \dfrac{1-q\theta e^{-\rho_b h}}{1-q} - d_2^b, \\ G^{-1}\left(\dfrac{1-q\theta e^{-\rho_b h}}{(1-q)d_1^b} - \dfrac{d_2^b}{d_1^b}\right), & \textit{в противном случае} \ , \end{cases} \tag{6.24}$$

$$\theta^* = \underset{\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{(1-q)\gamma H(p^*(\lambda^*(\theta))I) - \left[(1-q)\gamma_0 + q\theta\mu\right] I e^{-\rho_s h}}{\psi_s(p^*(\lambda^*(\theta))I)} \right\}, \tag{6.25}$$

где $d_1^b = d_1(\rho_b)$, $d_2^b = d_2(\rho_b)$.

Доказательство. Задача инвестора (6.10) представляет собой задачу оптимальной остановки

$$\mathbf{E}e^{-\rho_i \tau} g(X_\tau^i) \to \max_\tau \tag{6.26}$$

с линейной функцией выигрыша $g(x) = x - k^i(\lambda)\delta I$, где $\delta = 1/(1-\gamma)$. Иногда для краткости будем писать k^i вместо $k^i(\lambda)$.

Для нахождения решения в задаче (6.26) воспользуемся следующим результатом.

Утверждение 6.2. *Марковский момент* $\tau^* = \min\{t : X_t^i \geqslant p^* I\}$ *будет оптимальным моментом остановки в задаче (6.26), если выполнены следующие условия:*

$$\max_{l<pI<r} \frac{p - k^i\delta}{\psi_i(pI)} = \frac{p^* - k^i\delta}{\psi_i(p^*I)}, \tag{6.27}$$

$$a(x) \leq \rho(x - k^i\delta I) \ \text{ при } \ x > p^* I. \tag{6.28}$$

Для линейной функции выигрыша $g(x)$ данное утверждение следует, например, из [104, Theorem 2], а для произвольной $g(x)$ аналогичные условия имеются в [4].

Обозначим $\tilde{\psi}_i(p) = \psi_i(pI)$. Тогда

$$\left(\frac{p - k^i\delta}{\tilde{\psi}_i(p)}\right)' = \frac{k^i\delta - F(p)}{\tilde{\psi}_i^2(p)} \tilde{\psi}_i'(p), \tag{6.29}$$

где $F(p) = p - \tilde{\psi}_i(p)/\tilde{\psi}_i'(p)$.

В силу условия (**A**) для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ существует единственное число $p^*(\lambda)$, такое что $F(p^*(\lambda)) = k^i(\lambda)\delta$. Поэтому производная в (6.29) обращается в нуль в точке $p^*(\lambda)$, меняя при этом знак с положительного на отрицательный (т.к. функции $F(p)$ и $\tilde{\psi}_i(p)$ монотонно возрастают). Таким образом, условие (6.27) выполняется с $p^* = p^*(\lambda) = F^{-1}(k^i(\lambda)\delta)$, а условие (6.28) сразу следует из (**C**).

Тем самым доказано существование решения задачи инвестора $\tau^*(\lambda) = \min\{t : X_t^i \geqslant p^*(\lambda)I\}$ (для любого кредитного процента $\lambda \geq \lambda_0$) и его характеризация (6.23).

Заметим, что из условия (**D**), монотонности $F(p)$ и неравенства $F(p) < p$ следует: при $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$x_0 \leqslant k^i(\lambda_0)\delta I \leqslant k^i(\lambda)\delta I < F^{-1}(k^i(\lambda)\delta)I = p^*(\lambda)I,$$

тем самым $\tau^*(\lambda) > 0$ п.н. для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Перейдем к решению задачи банка.

Обозначим $c(\lambda) = (1-q)(d_1^b\lambda + d_2^b) + q\theta e^{-\rho_b h} - 1$ (сравни с (6.3)–(6.4)). Поскольку $\mathbf{E}e^{-\rho_b\tau^*(\lambda)} = \psi_b(x_0)/\psi_b(p^*(\lambda)I)$ (см., например, [30, Глава II]), то для критерия банка (6.7) при оптимальном поведении инвестора имеем:

$$C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda)) = c(\lambda)\mu I\mathbf{E}e^{-\rho_b\tau^*(\lambda)} = \frac{c(\lambda)}{\xi(\lambda)}\psi_b(x_0)\mu I, \tag{6.30}$$

где $\xi(\lambda) = \psi_b(p^*(\lambda)I)$.

Производная $C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda))$ по λ равна

$$\mu I\frac{\xi'(\lambda)(1-q)}{\xi^2(\lambda)}\left(\frac{1-q\theta e^{-\rho_b h}}{1-q} - d_2^b - G(\lambda)d_1^b\right), \tag{6.31}$$

где $G(\lambda) = \lambda - \xi(\lambda)/\xi'(\lambda)$.

Если $G(\lambda_0) \geq \left[(1-q\theta e^{-\rho_b h})/(1-q) - d_2^b\right]/d_1^b$, то в силу монотонности функции G (условие (**B**)) производная (6.31) отрицательна при $\lambda > \lambda_0$, тем самым $C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda))$ убывает по λ и ее максимум достигается при $\lambda^* = \lambda_0$.

Если $G(\lambda_0) < \left[(1-q\theta e^{-\rho_b h})/(1-q) - d_2^b\right]/d_1^b$, то по условию (**B**) найдется такое $\lambda^* = \lambda^*(\theta) > \lambda_0$, что $G(\lambda^*(\theta))d_1^b = (1-q\theta e^{-\rho_b h})/(1-q) - d_2^b$. Поскольку производная (6.31) в силу монотонности функции $G(\lambda)$ меняет знак с положительного на отрицательный в точке $\lambda^*(\theta)$, то $C(\lambda, \theta, \tau^*(\lambda))$ действительно достигает максимума в точке $\lambda^*(\theta)$.

Тем самым соотношение (6.24) доказано.

Для бюджетного эффекта, используя упоминавшуюся выше формулу $\mathbf{E}e^{-\rho_s\tau^*(\lambda)} = \psi_s(x_0)/\psi_s(p^*(\lambda)I)$ и условие (**E**), имеем:

$$\begin{aligned} B(\theta, \tau^*(\lambda^*(\theta))) &= \mathbf{E}e^{-\rho_s\tau^*(\lambda^*(\theta))}\left[(1-q)\gamma H(X^i_{\tau^*(\lambda^*(\theta))}) - [(1-q)\gamma_0 + q\theta\mu]Ie^{-\rho_s h}\right] \\ &= \psi_s(x_0)\frac{(1-q)\gamma H(p^*(\lambda^*(\theta))I) - [(1-q)\gamma_0 + q\theta\mu]Ie^{-\rho_s h}}{\psi_s(p^*(\lambda^*(\theta))I)}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Теперь существование максимума в (6.32) по $\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}$ сразу следует из соображений непрерывности и компактности.

Теорема полностью доказана. $\square$

Функция $p^*(\lambda)$ в этой теореме характеризует оптимальный порог инвестирования. Это означает, что оптимальный момент инвестирования проекта наступает, когда ожидаемая приведенная (со ставкой дисконта инвестора ρ_i) будущая интегральная прибыль X_t^i впервые превысит порог $p^*(\lambda)I$.

6.5. Модельный анализ. Некоторые экономические выводы

Как показано в предыдущем разделе, решение трехуровневой оптимизационной задачи существует для достаточно общего процесса прибыли и различных ставок дисконтирования инвестора, банка и государства. Однако, анализ такого решения (см. Теорему 6.1) будет достаточно громоздким. Поэтому, остановимся более подробно на случае геометрического броуновского движения (6.18) и одинаковых ставок дисконтирования $\rho_i = \rho_b = \rho_s = \rho$ и, соответственно, $\beta_i = \beta_b = \beta_s = \beta$. Будем также обозначать $k(\lambda) = k(\rho; \lambda) = d_1\lambda + d_2$ (см. (6.3)–(6.4)) и $\widehat{\gamma}_0 = \gamma_0 e^{-\rho h}$.

Из Теоремы 6.1 нетрудно вывести следующие явные формулы для решения трехуровневой задачи оптимизации в рассматриваемом здесь случае:

$$p^*(\lambda) = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{1}{1 - \gamma} \left[\mu(d_1\lambda + d_2) + \frac{1 - \mu}{1 - q} - \widehat{\gamma}_0 \right], \tag{6.33}$$

$$\lambda^*(\theta) = \max\left\{ \lambda_0, \frac{\beta}{\beta-1} \cdot \frac{1-\mu q\theta e^{-\rho h}}{(1-q)d_1} + \frac{1}{(\beta-1)d_1} \left[\frac{1-\mu}{\mu(1-q)} - \frac{\widehat{\gamma}_0}{\mu} \right] - \frac{d_2}{d_1} \right\}, \tag{6.34}$$

$$\theta^* = \begin{cases} \underline{\theta}, \text{ если } \ \widehat{\theta} < \underline{\theta} \\ \widehat{\theta}, \text{ если } \ \underline{\theta} \leqslant \widehat{\theta} \leqslant \overline{\theta}, \\ \overline{\theta}, \text{ если } \ \widehat{\theta} > \overline{\theta} \end{cases} \quad \text{где } \ \widehat{\theta} = \left[\frac{\beta^2\tilde{\gamma} - (\beta-1)}{\beta^2\tilde{\gamma} + (\beta-1)^2} - \widehat{\gamma}_0(1-q) \right] \frac{e^{\rho h}}{\mu q}, \ \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma}. \tag{6.35}$$

Перейдем к анализу полученных формул и некоторым выводам из них.

Прежде всего, чтобы избежать "разветвленных" формул, будем в дальнейшем предполагать, что $\lambda_0 < \dfrac{\beta}{\beta-1} \cdot \dfrac{1-q\overline{\theta}e^{-\rho h}}{(1-q)d_1} - \dfrac{(\beta-1)d_2+\widehat{\gamma}_0}{(\beta-1)d_1}$, т.е. оптимальный процент по кредиту для проекта превосходит минимально допустимую границу (при всех допустимых долях возврата кредита). Такое предположение представляется довольно естественным с экономической точки зрения.

6.5.1. Согласование интересов участников

При доказательстве Теоремы 6.1 были выведены общие формулы для оптимального NPV проекта, ожидаемого эффекта банка от оптимального кредитования проекта и оптимального бюджетного эффекта, которые в рассматриваемом далее случае геометрического броуновского движения с одинаковыми ставками дисконтирования участников приобретают следующий вид:

$$N(\tau^*(\lambda^*(\theta)),\lambda^*(\theta)) = c_1\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\left(\frac{1-\mu q\theta e^{-\rho h}}{1-q}-\widehat{\gamma}_0\right)^{1-\beta}, \tag{6.36}$$

$$C(\lambda^*(\theta),\theta,\tau^*(\lambda^*(\theta))) = c_1\left(\frac{1-\mu q\theta e^{-\rho h}}{1-q}-\widehat{\gamma}_0\right)^{1-\beta}, \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned} B(\theta,\tau^*(\lambda^*(\theta))) = c_2\left(\frac{1-\mu q\theta e^{-\rho h}}{1-q}-\widehat{\gamma}_0\right)^{-\beta} &\times \\ \times\left[\frac{\beta^2\tilde{\gamma}+(\beta-1)^2}{(\beta-1)^2}\left(\frac{1-\mu q\theta e^{-\rho h}}{1-q}-\widehat{\gamma}_0\right)-\frac{1}{1-q}\right]&, \end{aligned} \tag{6.38}$$

где $c_1 = I\dfrac{1-q}{\beta-1}\left[\dfrac{x_0(1-\gamma)(\beta-1)^2}{\beta^2 I}\right]^{\beta}$, $c_2 = c_1(\beta-1)$, $\widehat{\gamma}_0 = \gamma_0 e^{-\rho h}$, $\tilde{\gamma}$ определена в (6.35).

Из этих формул нетрудно видеть, что если $\theta^* > \underline{\theta}$, то в области "согласования интересов" $\{\theta : \underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \theta^*\}$ следующие три показателя:

– бюджетный эффект $B(\theta,\tau^*(\lambda^*(\theta))$,

– эффект банка от кредитования проекта $C(\lambda^*(\theta),\theta,\tau^*(\lambda^*(\theta))$,

– NPV проекта $N(\tau^*(\lambda^*(\theta)),\lambda^*(\theta))$

возрастают с ростом доли гарантированного возврата кредита θ.

Область параметров модели, при которых оптимальная доля возврата кредита превышает минимальную допустимую границу, можно рассматривать, как *область существования согласованных интересов* инвестора, банка и государства. Если параметры модели обеспечивают выполнение неравенства $\widehat{\theta} > \underline{\theta}$, где $\widehat{\theta}$ определено в (6.35), то увеличение доли возврата кредита (в определенных пределах) становится выгодным *всем участникам*, т.е. увеличивает значение критерия инвестора, банка и государства.

Этот факт несколько расходится с распространенным мнением, что льготы, предоставляемые государством инвестору, неизбежно ведут к определенным потерям ("недополучениям") бюджета. Так, в работе [66] последовательно проводится точка зрения, что предоставление налоговых льгот имеет не только прямой эффект, выражающийся в сокращении налоговых доходов бюджета, но и косвенные эффекты, которые часто сводятся к потерям для общества, не компенсируемым выгодами от этих льгот. Такая позиция во многом справедлива, на наш взгляд, для уже сложившейся (*существующей*) структуры налогоплательщиков. Однако, если речь идет о "создании" *нового* налогоплательщика, то во внимание должны приниматься факторы, связанные с тем, насколько "рано" появится этот налогоплательщик и как скоро он начнет приносить налоги в бюджет. И в этой ситуации "выгоды" от более раннего поступления налогов в бюджет могут оказаться более значительными, чем прямые или косвенные "потери" от введения льгот (как налоговых, так и не налоговых).

Условия, при которых увеличение налоговых льгот со стороны государства оказывается выгодным одновременно как инвестору (в смысле NPV от реализации проекта создания нового предприятия), так и государству (с точки зрения ожидаемых приведенных налоговых поступлений от создаваемого предприятия) были исследованы в предыдущих главах для налоговых каникул и политики амортизации. Возможность подобного "согласования интересов" инвестора и государства установлена и для механизма государственного софинансирования инвестиционных проектов, который, в отличие от налоговых льгот, уже связан с прямыми затратами государства (см. главу 4).

Если $\underline{\theta} = 0$, то, как нетрудно видеть из формулы (6.35), для существования области согласованных интересов необходимо и достаточно выполнения неравенства $\widehat{\theta} > 0$ или, что эквивалентно,

$$\gamma > \frac{(\beta - 1)[1 + (\beta - 1)\widehat{\gamma}_0(1 - q)]}{\beta^2 + \beta - 1 - (2\beta - 1)\widehat{\gamma}_0(1 - q)}. \tag{6.39}$$

Если в качестве доли возмещаемого НДС в начальных инвестициях взять $\gamma_0 = 0.15$ (что соответствует существующей в России стандартной ставке НДС в 18%), то максимум (по $\beta,\ h,\ q$) правой части неравенства (6.39) не превышает 0.26. Поэтому соотношение (6.39) выполняется при любых $\beta > 1,\ h > 0,\ q > 0$ и $\gamma > 0.26$, что справедливо для большинства налоговых систем. Поэтому можно сказать, что если не существует априорных ограничений снизу на величину государственных гарантий по возврату кредита, то область согласования интересов, в которой предоставление государством гарантий по кредитам (в определенных пределах) выгодно всем участникам, существует для почти любых параметров модели.

Отметим, что правая часть неравенства (6.39) убывает с ростом вероятности неудачи проекта q, тем самым условие существования области согласованных интересов становится менее ограничительным с ростом риска неудачи проекта. При $q = 0$ неравенство (6.39) превращается в

$$\gamma > \frac{(\beta - 1)[1 + (\beta - 1)\widehat{\gamma}_0]}{\beta^2 + \beta - 1 - (2\beta - 1)\widehat{\gamma}_0}. \tag{6.40}$$

Это условие обеспечивает существование области согласованных интересов (положительность оптимальной доли возврата кредита) и не зависит от риска неудачи проекта. Это означает, что предоставление государством гарантий банку по возврату кредита (в определенных пределах) является выгодным для всех участников (инвестора, банка и государства) даже в случае, когда величина риска точно не известна.

6.5.2. Зависимость оптимальных решений банка и государства от параметров модели

Исследуем теперь зависимость оптимального кредитного процента банка (в отношении проекта), оптимальной доли гарантированного возврата кредита и оптимального бюджетного эффекта от параметров прибыли реализованного проекта (среднего темпа роста α и волатильности σ), коэффициента налоговой нагрузки γ и величины риска (невозврата кредита инвестором) q. Чтобы не перегружать формулы, будем далее считать $\underline{\theta} = 0$, $\overline{\theta} = 1$, т.е. государство гарантирует банку возврат до 100% кредита.

Банк. Из формулы (6.34) непосредственно следует, что оптимальный процент по кредиту для проекта $\lambda^*(\theta)$, предлагаемый банком, линейно убывает по доле возврата кредита θ и монотонно возрастает по риску q, что согласуется и с экономической интуицией.

Что касается зависимости $\lambda^*(\theta)$ от доли кредита μ, то для каждого θ она является монотонно убывающей. Таким образом, если инвестор решил вложить в проект больше собственных средств (доля кредита тем самым уменьшается), то банку для оптимизации своей прибыли от кредитования придется увеличить цену кредита для инвестора, что уже менее очевидно. С другой стороны, как следует из (6.37), оптимальная ожидаемая прибыль банка (при оптимальном поведении инвестора) $C(\lambda^*(\theta), \theta, \tau^*(\lambda^*(\theta)))$ монотонно возрастает по доле кредита μ.

$\lambda^*(\theta)$ зависит от параметров прибыли (среднего темпа роста и волатильности) только через показатель β. Из соотношения (6.34) следует, что оптимальный процент по кредиту будет убывающей функцией от β. В свою очередь, по Утверждению 1.5 β является убывающей функцией от α и σ. Таким образом, оптимальный процент по кредиту $\lambda^*(\theta)$ при фиксированной доле возврата кредита θ будет возрастать при увеличении среднего темпа роста прибыли от проекта и его волатильности (показателя неопределенности).

Заметим, что $\lambda^*(\theta)$ не зависит от налоговой нагрузки проекта γ, но ситуация немного меняется, если рассматривать оптимальный процент по кредиту при оптимальной доле возврата кредита: $\lambda^*(\theta^*)$. А именно, $\lambda^*(\theta^*)$ не зависит от γ, если оптимальная доля возврата θ^* совпадает со своими допустимыми нижней или верхней границей (т.е. равна 0 или 1), и убывает по γ, если $0 < \theta^* < 1$. Это означает, что с ростом налоговой нагрузки на проект банк не должен увеличивать кредитный процент.

Оптимальная доля возврата кредита. Если выполнено условие (6.40), то, как следует из формулы (6.35), оптимальная доля θ^* не возрастает по величине риска q. Далее, условие "полной гарантии" ($\theta^* = 1$) можно записать как:

$$q(\mu - \gamma_0) \leqslant \left(\frac{\beta^2\gamma - (\beta-1)(1-\gamma)}{\beta^2\gamma + (\beta-1)^2(1-\gamma)} - \widehat{\gamma}_0 \right) e^{\rho h}. \tag{6.41}$$

Это означает, что для не очень маленьких кредитах ($\mu > \gamma_0$) при малых рисках (ниже порогового значения) государству выгодно предоставлять полные (100%-ные) гарантии по возврату кредита.

С ростом налоговой нагрузки γ оптимальная доля возврата кредита не убывает, а вот зависимость от параметров прибыли носит более сложный характер и определяется соотношением между коэффициентом γ и показателем β. При $\gamma < \dfrac{(\beta-1)^2}{\beta^2 + (\beta-1)^2}$ оптимальная доля θ^* не возрастает по параметрам α и σ, при $\gamma \geqslant \dfrac{(\beta-1)^2}{\beta^2 + (\beta-1)^2}$ — не убывает.

Остановимся еще на случае, когда $\theta^* = 1$, т.е. государству выгодно (с точки зрения бюджетного эффекта) предоставлять банку гарантию полного возврата всей суммы кредита. Как следует из формулы (6.35), для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6.41), которое нетрудно переписать в следующем виде:

$$\gamma \geqslant \frac{d}{1+d}, \quad \text{где } d = \frac{\beta-1}{\beta^2} \cdot \frac{1 + (\beta-1)[\mu\widehat{q} + \widehat{\gamma}_0(1-q)]}{1 - \mu\widehat{q} + \widehat{\gamma}_0(1-q)}, \tag{6.42}$$

а $\widehat{q} = qe^{-\rho h}$ — "приведенная" (к моменту инвестирования) вероятность дефолта инвестора.

Максимальное (по $\beta > 1$) значение правой части неравенства (6.42) дает нижнюю границу $\underline{\gamma}$ для коэффициента налоговой нагрузки, при превышении которой государству выгодно гарантировать банку полный возврат кредита.

В Таблице 6.1 ниже приводятся такие нижние границы для различных долей μ кредита в начальных инвестициях и вероятностей дефолта q. В качестве других параметров взята ставка дисконтирования $\rho = 10\%$ (в год), длительность лага капитальных вложений $h = 2$ (года) и доля возмещаемого НДС в начальных инвестициях $\gamma_0 = 0.15$.

Таблица 6.1. Граница налоговой нагрузки $\underline{\gamma}$ для 100%-ных гарантий

Доля кредита (μ)	Вероятность дефолта инвестора (q)				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.9	0.271	0.305	0.342	0.385	0.434
0.5	0.257	0.270	0.285	0.301	0.317
0.2	0.247	0.248	0.250	0.252	0.253

Как видно из приведенных в таблице результатов, чувствительность величины $\underline{\gamma}$ от вероятности дефолта и доли кредита в начальных инвестициях по проекту оказывается довольно слабой, особенно для малых значений вероятности дефолта или доли кредита. Так, для вероятности дефолта не более 0.1 нижняя граница $\underline{\gamma}$ налоговой нагрузки, при которой государству выгодно предоставлять гарантии на всю сумму кредита, практически не меняется при разных долях кредита. В случае, когда доля кредита в инвестициях мала (не превышает 20%), величина нижней границы $\underline{\gamma}$ почти не зависит от вероятности дефолта (по крайней мере, если эта вероятность не превышает 0.5).

Таким образом, при не слишком большой вероятности дефолта инвестора 100%-ные гарантии по возврату кредита выгодны государству с точки зрения бюджетного эффекта для большинства налоговых систем (с не очень маленькой налоговой нагрузкой на прибыль). В частности, если коэффициент налоговой нагрузки превышает 40%, то полные гарантии должны предоставляться проектам с вероятностью дефолта не более 0.4.

Бюджетный эффект. Отметим прежде всего, что если $\theta^* > 0$, то в области $\{\theta : 0 \leqslant \theta \leqslant \theta^*\}$ дополнительные (по сравнению с отсутствием господдержки кредита) средние налоговые поступления от проекта (с учетом возврата НДС) будут не меньше, чем средние приведенные затраты государства на поддержку проекта:

$$(1-q)\,[T(\theta)-T(0)] \geqslant q\mathbf{E}\theta I e^{-\rho(h+\tau^*(\lambda^*(\theta)))},$$

где $T(\theta) = \mathbf{E}e^{-\rho\tau^*(\lambda^*(\theta))}[\gamma X_{\tau^*(\lambda^*(\theta))} - \gamma_0 I]$ — ожидаемые приведенные налоговые поступления в бюджет от реализованного проекта (за вычетом возвращенного НДС) при доле возврата кредита θ и оптимальном поведении инвестора и банка.

Из приведенных выше формул (6.35) и (6.38) выводится следующее выражение для оптимального бюджетного эффекта $B^* = B(\theta^*, \tau^*(\lambda^*(\theta^*)))$ при оптимальной доле возврата кредита:

$$B^* = c_3(1-q)^{\beta} \times \begin{cases} z_0^{-\beta}\left[\dfrac{\beta^2\tilde{\gamma} + (\beta{-}1)^2}{(\beta-1)^2} z_0 - 1\right], & \text{если } \ \theta^* = 0, \\ \dfrac{1}{(\beta-1)(1-q)}\left(\dfrac{\beta}{\beta{-}1}\tilde{\gamma} + \dfrac{\beta{-}1}{\beta}\right)^{\beta}, & \text{если } \ 0 < \theta^* < 1, \\ z_1^{-\beta}\left[\dfrac{\beta^2\tilde{\gamma} + (\beta{-}1)^2}{(\beta-1)^2} z_1 - 1\right], & \text{если } \ \theta^* = 1, \end{cases}$$

где $z_0{=}1{-}\widehat{\gamma}_0(1{-}q)$, $z_1{=}1{-}\mu\widehat{q}{-}\widehat{\gamma}_0(1{-}q)$, $\tilde{\gamma}{=}\dfrac{\gamma}{1{-}\gamma}$, $c_3{=}I\left[\dfrac{x_0(1{-}\gamma)(\beta{-}1)^2}{\beta^2 I}\right]^{\beta}$.

Отсюда можно вывести, что B^* убывает по риску q, если $\theta^* > 0$. Для случая $0 < \theta^* < 1$ это очевидно, а при $\theta^* = 1$ следует из представления B^* в виде произведения двух положительных убывающих (при $\mu > \gamma_0$) функций:

$$\left(\frac{1-q}{1{-}\mu\widehat{q}{-}\widehat{\gamma}_0(1{-}q)}\right)^{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\beta^2\tilde{\gamma}{+}(\beta{-}1)^2}{(\beta-1)^2}[1{-}\mu\widehat{q}{-}\widehat{\gamma}_0(1{-}q)] - 1.$$

Нетрудно также увидеть, что оптимальный бюджетный эффект с оптимальной долей возврата кредита возрастает по коэффициенту налоговой нагрузки проекта γ, если $0 < \theta^* < 1$.

Что касается зависимости оптимального бюджетного эффекта $B^* = B(\theta^*, \tau^*(k^*(\theta^*)))$ от доли кредита μ, то при неполных гарантиях ($\theta^* < 1$) B^* вообще не зависит от соотношения собственных и заемных средств. Случай полной гарантии ($\theta^* = 1$) требует более подробного рассмотрения.

Обозначим $x = \mu\tilde{q} + \widehat{\gamma}_0(1-q)$, $\quad B = \beta/(\beta-1)$,
$B(x) = (1-x)^{-\beta}\big[(B^2\tilde{\gamma}+1)(1-x) - 1\big]$. Тогда

$$\begin{aligned} B'(x) &= (1-x)^{-\beta-1}\big[\beta(B^2\tilde{\gamma}+1)(1-x) - \beta - (B^2\tilde{\gamma}+1)(1-x)\big] = \\ &= (\beta-1)(1-x)^{-\beta-1}\big[B^2\tilde{\gamma} - 1/(\beta{-}1) - (B^2\tilde{\gamma}+1)x\big] \geq \\ &\geq (\beta-1)(1-x)^{-\beta-1}\left(B^2\tilde{\gamma} - \frac{1}{\beta-1} - (B^2\tilde{\gamma}+1)\frac{B^2\tilde{\gamma} - 1/(\beta{-}1)}{B^2\tilde{\gamma}+1}\right) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $x \leq \dfrac{\beta^2\tilde{\gamma} - (\beta-1)}{\beta^2\tilde{\gamma} + (\beta-1)^2}$ при $\theta^* = 1$ в силу формулы (6.35).

Таким образом, в случае полной гарантии оптимальный бюджетный эффект возрастает при увеличении доли кредита в начальных инвестициях, что, на наш взгляд, совсем не очевидно из интуитивных соображений.

Для оценки эффективности оптимальной доли возврата кредита (по сравнению с отсутствием государственных гарантий по кредиту) с точки зрения пополнения бюджета можно рассмотреть показатель относительной эффективности:

$$\mathcal{E} = \frac{B(\theta^*, \tau^*(\lambda^*(\theta^*)))}{B(0, \tau^*(\lambda^*(0)))}.$$

Можно показать, что при $\theta^* > 0$ величина $\mathcal{E}$ возрастает с увеличением риска проекта q.

В самом деле, если $0 < \theta^* < 1$, то

$$\mathcal{E} = c_4 \frac{1}{1-q} \cdot \frac{(1-z)^\beta}{(B^2\tilde{\gamma}+1)(1-z)-1}, \tag{6.43}$$

где $z = \widehat{\gamma}_0(1-q), \quad B = \beta/(\beta-1)$, а положительная константа c_4 не зависит от риска проекта q.

Нетрудно проверить, что функция $f(z) = (1-z)^{-\beta}\big[(B^2\tilde{\gamma}+1)(1-z)-1\big]$ будет возрастать по z, т.е. убывать по q. Поэтому $\mathcal{E}$ в (6.43) растет по риску q.

В случае $\theta^* = 1$ показатель относительной эффективности можно записать в виде $\mathcal{E} = f(y)/f(z)$, где функция $f(\cdot)$ и z определены выше, а $y = z + \mu\widehat{q} = \widehat{\gamma}_0 + (\mu - \gamma_0)e^{-\rho h}q$. Поскольку функция $f(\cdot)$ монотонно растущая, то $f(y)$ возрастает по q (при $\mu > \gamma_0$), а $f(z)$ убывает по q. Таким образом, $\mathcal{E}$ будет возрастать по риску q.

Это означает, что эффективность "оптимального" механизма гарантий по кредитам (по сравнению с отсутствием таких гарантий вообще) увеличивается с ростом величины риска (неудачи проекта и невозврата кредита), что представляется совсем не очевидным.

Глава 7. Модельный анализ российских налоговых новаций в рамках теории инвестиционных ожиданий

В данной главе мы покажем, как модели инвестиционных ожиданий, разработанные в предыдущих главах, могут быть использованы для анализа налоговых новаций, проводившихся в России в начале XXI века. Будет проанализирована с модельной точки зрения реформа налогообложения предприятий (2001–2002 гг.), проведен сравнительный анализ систем налоговых льгот на территориях опережающего развития (введенных с 2015 г.) и в особых экономических зонах. Кроме того, будут рассмотрены также некоторые варианты налоговых изменений, которые были предметом обсуждения, но по тем или иным причинам пока не осуществлены.[30]

7.1. Модельный анализ реформы налогообложения 2002 года для новых предприятий

В начале 1990-х годов страны с переходной экономикой (СНГ и Восточная Европа) испытывали значительный бюджетный дефицит. Это обстоятельство отразилось на налоговых системах этих стран: высокие ставки налогов для действующих предприятий и существенные налоговые льготы для новых предприятий должны было способствовать привлечению инвестиций. Однако, такого рода системы приводили на практике к различным схемам "уклонения от налогов" (что, в свою очередь, вызывает необходимость усиления налогового администрирования) и не обеспечивали должным образом решение задач по привлечению инвестиций и наполнению бюджета.

На рубеже веков в большинстве стран Восточной Европы и СНГ произошло значительное снижение налоговых ставок и ликвидация большей части налоговых льгот.

---

[30] Результаты главы опубликованы в работах [7, 8, 9, 16, 23, 82] с соавторами.

Налог на прибыль предприятий снижался с 40–25% (в начале 1990-х годов) до 30–15% (в 2000-х годах). Наиболее существенное снижение произошло в Венгрии: с 55% в 1991 г. до 16% в 2004 г.

Налог на добавленную стоимость уменьшался с 30–20% (в начале 1990-х годов) до 20–15% (в 2000-х годах). Исключение составляют страны Прибалтики, в которых наблюдалось повышение НДС (до 18%), связанное, скорее всего, с чересчур заниженной ставкой в начале 90-х годов (10% в Эстонии и 14% в Латвии).

Среди оставшихся *налоговых льгот* наиболее популярными в этих странах являются:

– ускоренная амортизация (в частности, удвоенная), например, в Эстонии, Латвии, Казахстане;

– налоговые каникулы для новых предприятий (по налогам на прибыль и/или на имущество) на 2 года и более – в Чехии, Польше, Эстонии, Латвии, Казахстане;

– ослабление ограничений для переноса убытков на будущее.

Подробный обзор налоговых льгот, использовавшихся различными странами для привлечения инвестиций в начале 2000-х годов, можно найти, например, в [163].

Что касается России, то можно выделить следующие "агрегированные" этапы реформы налогообложения предприятий на рубеже XX–XXI вв.

I этап (1990-е годы), характеризующийся высокими налоговыми ставками (на прибыль 35%, НДС 20%, ЕСН 35.6%) и одновременно широкой системой налоговых льгот для новых предприятий (налоговые каникулы по налогу на прибыль, ускоренная амортизация, инвестиционные налоговые кредиты и др.).

II этап (2000-е годы). Понижение налоговых ставок (на прибыль – 24%, НДС – 18%, ЕСН – 26%). Отмена почти всех налоговых льгот. Возможность уменьшения региональной части налога на прибыль (не более чем на 4%).

III этап (настоящее время) можно связать с постепенным возвратом к "точечным" налоговым льготам как на территориальном уровне (создание особых экономических зон и территорий опережающего развития), так и на уровне отдельных проектов (например, через специальные инвестиционные контракты для отдельных отраслей промышленности).

Современную реформу налогообложения российских предприятий мы связываем с началом 2001 года, когда были введены в действие четыре главы второй части Налогового Кодекса РФ, посвященные, в том числе, налогу на добавленную стоимость (глава 21) и единому социальному налогу (глава 24). Наиболее значительные для предприятий изменении налогообложения прибыли были введены с 2002 года (глава 25). В частности, для новых предприятий были отменены существовавшие льготы по предоставлению налоговых каникул и разрешение на ускоренную амортизацию. При этом ставка налога на прибыль была существенно снижена.

Целями налоговой реформы были провозглашены, наряду с другими, снижение налоговой нагрузки, создающей стимулы к уклонению от уплаты налогов, а также усиление стимулирующей функции налоговой системы, направленной на привлечение инвестиций. Хотя пополнение бюджета не входило в приоритетные цели реформы, тем не менее стимулирование инвестора путем снижения налоговых ставок необходимо сопровождать анализом возникающих при этом бюджетных эффектов, связанных с увеличением или уменьшением ожидаемых налоговых поступлений в бюджет разных уровней от реализации инвестиционных проектов.

Уменьшение налоговой ставки приводит к более раннему созданию предприятия и тем самым более раннему появлению нового налогоплательщика. При этом увеличение или уменьшение ожидаемых налоговых поступлений зависит от соотношений между различными параметрами инвестиционного проекта, нормой дисконта, а также от расщепления налоговых платежей на федеральные и региональные. Так, например, снижение налога, идущего целиком в федеральный бюджет, приводит к более раннему созданию предприятий и, следовательно, к увеличению ожидаемых налоговых поступлений в региональный бюджет.

7.1.1. Данные для сравнительного анализа двух систем налогообложения предприятий

Разработанные в предыдущих главах модели инвестиционных ожиданий будут использованы для сравнения следующих двух систем налогообложения российских предприятий.

Одна из них, которую будем называть *старой*, действовала в России до 31 декабря 2001 года. Ее параметрами, имеющими отношение к рассматриваемому здесь сравнительному анализу, являются:

- ставка налога на прибыль предприятий — 35% (из них 11% — в федеральный бюджет, 19% — в бюджеты субъектов РФ и 5% — в местные бюджеты);
- налоговые каникулы для вновь созданных предприятий на срок окупаемости, но не более трех лет;
- ускоренная амортизация активной части основных фондов (по линейному методу) с коэффициентом ускорения не более двух (допускался и больший коэффициент по согласованию с финансовыми органами субъектов РФ).

С 1 января 2002 года введена в действие новая система налогообложения прибыли, в которой отменялись налоговые каникулы для новых предприятий и ускоренная амортизация, но ставка налога на прибыль снижалась до 24% (из них 7.5% — в федеральный бюджет, 14.5% — в бюджеты субъектов РФ и 2% — в местные бюджеты[31]).

В качестве показателей, по которым будет производиться сравнение старой и новой налоговых систем (далее они иногда будут помечаться индексами old и new соответственно), будем брать следующие:

- оптимальный уровень (порог) инвестирования p^*, характеризующий момент прихода инвестора;

---

[31] В 2004 г. распределение по бюджетам несколько изменилось: 5% — в федеральный бюджет, 17% — в бюджеты субъектов РФ и 2% — в местные бюджеты. С 2009 г. общая ставка налога на прибыль была еще уменьшена до 20%.

- ожидаемые налоговые поступления в федеральный и региональный бюджеты $\mathcal{T}^f$ и $\mathcal{T}^r$ (при оптимальном поведении инвестора), приведенные к нулевому моменту времени;
- ожидаемый оптимальный чистый приведенный доход инвестора $\mathcal{N}$.

Величины налоговых ставок (в годовом исчислении) брались следующие:

– на прибыль предприятий $\gamma_{\text{пр}}^{\text{old}} = 35\%$ и $\gamma_{\text{пр}}^{\text{new}} = 24\%$;

– на добавленную стоимость $\gamma_{\text{НДС}} = 20\%$;

– на имущество $\gamma_{\text{им}} = 2\%$;

– на единый социальный налог $\gamma_{\text{соц}} = 35.6\%$, причем отчисления в федеральный бюджет $\gamma_{\text{соц}}^{f} = 28\%$ (что совпадает с отчислениями в Пенсионный Фонд РФ);

– на доходы физических лиц $\gamma_{\text{фл}} = 13\%$.

Для старой системы в качестве налоговых льгот брались налоговые каникулы $\nu = 3$ и коэффициент ускорения амортизации $k_a = 2$. Дисконт полагался равным $\rho = 10\%$.

Параметры инвестиционных проектов:

– постоянные инвестиции ($\alpha_I = 0,\ \sigma_I = 0$);

– лаг капитальных вложений $l = 3$ (года);

– средние темпы изменения добавленной стоимости α_π от –1% до 2%;

– волатильность добавленной стоимости $\sigma_\pi \sim 0.05$–0.5;

– линейный метод амортизации с нормами 20% для активной части фондов и 3% для неактивной.

7.1.2. Результаты сравнения

Инвестиционные проекты, для которых проводились расчеты, были разбиты на группы в зависимости от доли активной части фондов ψ, которая может характеризовать "техническую" оснащенность проекта (машинами, механизмами и т.п.), и доли фонда оплаты труда в добавленной стоимости $\tilde{\mu}$ (зарплатоемкость проекта).

В таблицах ниже приводятся значения отношений описанных выше показателей для старой и новой систем:

$$R^p = \frac{p^*_{\text{new}}}{p^*_{\text{old}}}, \qquad R^f = \frac{\mathcal{T}^f_{\text{new}}}{\mathcal{T}^f_{\text{old}}}, \qquad R^r = \frac{\mathcal{T}^r_{\text{new}}}{\mathcal{T}^r_{\text{old}}}, \qquad R^N = \frac{\mathcal{N}_{\text{new}}}{\mathcal{N}_{\text{old}}}$$

для различных вариантов инвестиционных проектов.

В Таблице 7.1 приведены значения определенных выше отношений для технически оснащенного проекта с малой зарплатоемкостью ($\psi = 0.9$, $\tilde{\mu} = 0.2$).

Таблица 7.1. Большая доля активных фондов

α_π	Показатели	$\sigma_\pi = 0.25$	$\sigma_\pi = 0.5$
–1%	R^p	0.89	0.89
	R^f	1.11	1.01
	R^r	1.05	1.00
	R^N	1.22	1.09
0%	R^p	0.88	0.88
	R^f	1.10	1.00
	R^r	1.02	0.98
	R^N	1.22	1.10
1%	R^p	0.87	0.87
	R^f	1.08	0.99
	R^r	1.00	0.96
	R^N	1.22	1.11
2%	R^p	0.86	0.86
	R^f	1.06	0.98
	R^r	0.97	0.94
	R^N	1.22	1.12

В Таблице 7.2 приведены аналогичные результаты для другого крайнего случая инвестиционного проекта — слабо технически оснащенного и с высокой зарплатоемкостью ($\psi = 0.2$, $\tilde{\mu} = 0.7$).

Таблица 7.2. Малая доля активных фондов

α_π	Показатели	$\sigma_\pi = 0.25$	$\sigma_\pi = 0.5$
–1%	R^p	0.95	0.96
	R^f	1.07	1.02
	R^r	1.07	1.02
	R^N	1.10	1.04
0%	R^p	0.95	0.95
	R^f	1.07	1.02
	R^r	1.07	1.03
	R^N	1.10	1.05
1%	R^p	0.94	0.94
	R^f	1.07	1.02
	R^r	1.07	1.02
	R^N	1.11	1.07
2%	R^p	0.93	0.93
	R^f	1.07	1.03
	R^r	1.06	1.02
	R^N	1.12	1.08

Результаты, относящиеся к "промежуточному" случаю средних значений технической оснащенности ψ мы здесь не приводим.

Многочисленные расчеты позволяют сделать ряд выводов относительно сравнения старой и новой систем налогообложения. Подчеркнем, что наши выводы будут относиться исключительно к инвестиционным проектам создания новых предприятий, характерной особенностью которых является возможность выбора момента инвестирования.

Технически высоко оснащенные проекты ($\psi \sim 0.9$). При новой системе инвестор приходит существенно раньше (уровень инвестирования в новой системе на 10–15% ниже, чем в старой). Разница в ожидаемых налоговых поступлениях в федеральный бюджет при старой и новой системах падает с ростом неопределенности (волатильности проекта). При умеренной величине волатильности (порядка 0.25) федеральный бюджет будет получать при новой системе примерно на 10% больше, чем при старой, но при очень больших волатильностях ожидаемые поступления в бюджет при различных системах станут примерно одинаковыми. Поступления в региональный бюджет в новой и старой системах также будут примерно одинаковыми (при различных волатильностях). Однако с увеличением среднего темпа роста добавленной стоимости новая система становится даже несколько хуже старой для обоих бюджетов. NPV инвестора при новой системе всегда больше, чем при старой, примерно на 20% (для умеренных волатильностей) и на 10% (для высоких волатильностей).

Технически слабо оснащенные проекты ($\psi \sim 0.2$). Для таких проектов льготы по амортизации не играют большой роли и типичной является высокая зарплатоемкость $\tilde{\mu}$. По новой системе инвестор приходит почти в то же время, что и при старой (уровни инвестирования очень близки). Ожидаемые налоговые поступления в бюджеты при старой и новой системах отличаются незначительно (особенно при больших волатильностях). В отличие от случая технически оснащенных проектов новая система независимо от параметров проекта приносит больше налогов (в бюджеты разных уровней), чем старая. Наибольшую относительную выгоду в этом случае, как и в предыдущем, имеет инвестор, NPV которого при новой системе всегда больше: на 10–15% (для умеренных волатильностей) и примерно на 5–10% (для высоких волатильностей).

Вопрос о дальнейшем снижении ставки налога на прибыль (в новой системе налогообложения) связан с исследованием зависимости налоговых поступлений от этой ставки. Для того, чтобы элиминировать эффекты от расщепления бюджетов, рассматривались налоговые поступления в консолидированный бюджет $\mathcal{T}(\gamma_{\text{пр}}) = \mathcal{T}^f + \mathcal{T}^r$ как функция от налоговой ставки $\gamma_{\text{пр}}$. Связь между налоговыми поступлениями и налоговой ставкой обычно описывается кривой Лаффера, характерной особенностью которой является сначала возрастание, а затем (после некоторого порога, называемого точкой Лаффера) – убывание.

Как показали проведенные расчеты, точка Лаффера по налогу на прибыль предприятий $\gamma^*_{\text{пр}}$ (в которой достигается максимум функции $\mathcal{T}(\gamma_{\text{пр}})$) слабо чувствительна к изменениям параметров технической оснащенности проекта ψ и его зарплатоемкости $\tilde{\mu}$. Для проектов с достаточно большой волатильностью точка Лаффера очень велика и далека от существующих ставок ($\gamma^*_{\text{пр}} > 70\%$), а с уменьшением волатильности падает до "разумных" значений. Так, при умеренной волатильности (порядка 0.15) и не очень больших средних темпах роста α_π величина $\gamma^*_{\text{пр}}$ колеблется в пределах 20–30%. При дальнейшем уменьшении волатильности точка Лаффера снижается, и для малых темпов α_π очень близка к нулю.

Отталкиваясь от ставки $\gamma_{\text{пр}} = 24\%$, можно сделать вывод, что ее снижение может принести бюджетный эффект (т.е. увеличить ожидаемые налоговые поступления в консолидированный бюджет) лишь для проектов с малой волатильностью и не очень высоким средним темпом роста добавленной стоимости. При увеличении волатильности эффект сначала уменьшается, а затем вообще становится отрицательным. Тем самым, для проектов с большой неопределенностью добавленной стоимости снижение налоговой ставки ведет только к уменьшению ожидаемых налоговых поступлений.

7.2. Бюджетные эффекты изменений налога на добавленную стоимость

В этом разделе оценим, какие эффекты может дать снижение ставки НДС, являющееся основной частью реформирования налога на добавленную стоимость.

В качестве базовой ставки возьмем $\gamma^{\text{old}}_{\text{НДС}} = 20\%$, которая действовала до 2004 г., и рассмотрим варианты ее снижения до 18% (действовала в 2004–2019 гг., а с 2019 г. опять повышена до 20%) и до 15% (такое предложение рассматривалось в Госдуме в начале 2020 года).

В качестве показателей, по которым проводится сравнение, берутся ожидаемые приведенные налоговые поступления в федеральный $\mathcal{T}^f$, региональный $\mathcal{T}^r$ и консолидированный $\mathcal{T} = \mathcal{T}^f + \mathcal{T}^r$ бюджеты.

Другие показатели (уровень инвестирования и NPV инвестора) при уменьшении ставки НДС монотонно убывают и поэтому, на наш взгляд не слишком интересны для анализа. На налоговые поступления в бюджеты изменение ставки НДС оказывает как прямое влияние (собираемый НДС в федеральном бюджете), так и косвенное. В частности, региональный бюджет не получает непосредственно НДС, но изменение ставки влияет на оптимальный момент инвестирования, а, тем самым, и на собираемые регионом налоги.

Были проведены расчеты для значения отношений приведенных налоговых поступлений в федеральный, региональный и консолидированный бюджет

$$R^f = \frac{\mathcal{T}^f_{\text{new}}}{\mathcal{T}^f_{\text{old}}}, \qquad R^r = \frac{\mathcal{T}^r_{\text{new}}}{\mathcal{T}^r_{\text{old}}}, \qquad R = \frac{\mathcal{T}_{\text{new}}}{\mathcal{T}_{\text{old}}}$$

для различных вариантов инвестиционных проектов и двух "альтернативных" ставок $\gamma^{\text{new}}_{\text{НДС}}$.

Диапазоны параметров проекта брались такие же, как и выше. Как показали расчеты, зависимость от доли активных фондов ψ и зарплатоемкости $\tilde{\mu}$ оказывается очень слабой, поэтому рассматривались "средние" значения этих параметров $\psi = 0.5,\ \tilde{\mu} = 0.5$.

Весьма существенное влияние на результаты расчетов оказывает учет политики (или практики) возврата НДС на начальные инвестиции. Хотя по законодательству в настоящее время налогоплательщики имеют право на возврат НДС (в виде налогового вычета), уплаченного при осуществлении капитальных вложений, на практике такой возврат идет далеко не всегда и, зачастую, сопровождается сложностями. Поэтому в рамках нашей модели будем рассматривать ситуацию, когда предприятие в момент начала своего функционирования $\tau + l$ получает из федерального бюджета сумму $\varphi\gamma_{\text{НДС}}I_\tau$ в качестве возврата НДС, уплаченного в момент τ за начальные инвестиции, где $\varphi,\ 0 \le \varphi \le 1$, есть доля возвращенного НДС (см. раздел 1.8).

Для случая такого частичного возврата оптимальный уровень инвестирования описывается формулой (1.45).

В приведенных ниже таблицах представлены результаты расчетов для различных вариантов политики возврата налога на добавленную стоимость.

Как видно из Таблицы 7.3, в случае полного возврата НДС ($\varphi = 1$) эффекты от снижения ставок НДС носят различный характер для федерального и регионального бюджетов. Прежде всего, отметим весьма слабую чувствительность результатов к изменениям среднего темпа роста добавленной стоимости проекта α_π и ее волатильности σ_π.

Федеральный бюджет во всех случаях только проигрывает от снижения ставки НДС, т.е. эффект от "недобора" этого налога преобладает над дополнительными налоговыми поступлениями от более раннего прихода инвестора. При снижении ставки до 15% федеральный бюджет может потерять до 5–7% налогов (по сравнению со ставкой $\gamma_{\text{НДС}} = 18\%$) или около 10% по сравнению с $\gamma_{\text{НДС}} = 20\%$.

Таблица 7.3. Полный возврат НДС

α_π	Показатель	$\sigma_\pi = 0.04$		$\sigma_\pi = 0.14$	
		$\gamma_{\text{НДС}} = 18\%$	$\gamma_{\text{НДС}} = 15\%$	$\gamma_{\text{НДС}} = 18\%$	$\gamma_{\text{НДС}} = 15\%$
0%	R^f	0.99	0.98	0.96	0.89
	R^r	1.06	1.15	1.01	1.04
	R	1.01	1.02	0.97	0.92
1%	R^f	0.97	0.92	0.95	0.88
	R^r	1.03	1.08	1.01	1.03
	R	0.99	0.96	0.97	0.92
2%	R^f	0.96	0.89	0.95	0.88
	R^r	1.02	1.04	1.01	1.02
	R	0.97	0.93	0.96	0.91

В отличие от федерального бюджета снижение ставки НДС оказывает слабо положительное влияние на региональный бюджет. Это означает, что регион начинает получать дополнительные налоги в результате привлечения инвестора (более раннего инвестирования). Однако дополнительный выигрыш региона не очень велик и составляет не более 5% (при ставке 18%). Дальнейшее снижение ставки до 15% также не принесет региону большого выигрыша, дополнительный прирост налогов составит порядка 2–5% по сравнению с базовой ставкой $\gamma_{\text{НДС}} = 20\%$ (за исключением проектов с низкими волатильностями и низкими темпами роста добавленной стоимости).

Иная картина наблюдается, если снижение ставки налога будет проходить в условиях отказа от возврата НДС, связанного с начальными инвестициями — см. Таблицу 7.4.

Таблица 7.4. Без возврата НДС

α_π	Показатель	$\sigma_\pi = 0.04$		$\sigma_\pi = 0.14$	
		$\gamma_{\text{НДС}}$=18%	$\gamma_{\text{НДС}}$=15%	$\gamma_{\text{НДС}}$=18%	$\gamma_{\text{НДС}}$=15%
0%	R^f	1.13	1.36	0.97	0.96
	R^r	1.20	1.60	1.05	1.13
	R	1.15	1.41	1.00	1.00
1%	R^f	1.04	1.10	0.97	0.92
	R^r	1.11	1.29	1.04	1.10
	R	1.06	1.14	0.99	0.98
2%	R^f	1.00	0.99	0.97	0.92
	R^r	1.06	1.16	1.03	1.08
	R	1.01	1.03	0.98	0.96

Здесь уже проявляется достаточно выраженная зависимость от волатильности добавленной стоимости проекта и ее темпа роста.

При малой волатильности оба бюджета получают дополнительные налоги. При этом относительный прирост федерального бюджета может составить до 13%, а регионального — до 20% (при ставке 18%), а дальнейшее снижение ставки до 15% может увеличить эти показатели до 36% и 60% соответственно. Правда цифры прироста будут падать с увеличением темпа роста добавленной стоимости.

Для проектов с умеренной и большой волатильностью федеральный бюджет уже начинает проигрывать от снижения ставки НДС. Что касается регионального бюджета, то он получает дополнительные поступления, хотя их относительный прирост становится гораздо меньше (не более 5% для ставки 18%). Дальнейшее снижение ставки до 15% еще более усугубляет положение дел для федерального бюджета (уменьшение налоговых поступлений может составить до 8% по сравнению с базовой ставкой), но увеличивает налоговый выигрыш региона (примерно на 10%).

Подводя итог, можно отметить, что эффекты от снижения ставок НДС существенным образом связаны с политикой возврата НДС за начальные инвестиции. При строгом соблюдении существующего законодательства, предусматривающего полный возврат НДС на капитальные вложения по окончании периода их освоения, в федеральный бюджет будет поступать меньше налогов, а в региональный бюджет — больше. При этом дальнейшее снижение ставки до 15% не принесет большого эффекта для региона, а лишь увеличит недобор в федеральный бюджет. Одновременный выигрыш для бюджетов обоих уровней может наступить лишь в условиях отказа от возврата НДС, что, впрочем, не слишком согласуется с существующими законодательными положениями.

7.3. Сравнение показателей при различных схемах имущественного налога

В этом разделе проводится сравнительный анализ двух систем имущественных налогов: налога на имущество — традиционного для налогообложения российских предприятий, и налога на недвижимость, принятого во многих развитых и развивающихся странах и являющегося возможной перспективой для России.

Объектом налогообложения недвижимости выступает земля и находящиеся на ней здания и сооружения. В то же время активные фонды (машины, оборудование, транспортные средства, запасы, нематериальные активы и прочее имущество, кроме зданий и сооружений) выводятся из-под налогообложения.

С одной стороны, налог на недвижимость способен обеспечить устойчивый уровень поступлений в местные бюджеты, поскольку именно недвижимое имущество является одним из наиболее стабильных (и прозрачных) объектов налогообложения. С другой стороны, вывод из-под налогообложения активной части основных фондов может способствовать техническому перевооружению производства и более эффективному использованию недвижимости.

Система налогообложения недвижимости действует во многих странах и хорошо зарекомендовала себя с точки зрения выполнения фискальной и стимулирующей функций в странах как с развитой экономикой, так и с переходной экономикой. В частности, налог на недвижимость является одним из самых существенных собственных источников наполнения местных бюджетов.

В России эксперимент по налогообложению недвижимости начался в 1997 году в Твери и Новгороде, а затем несколько раз продлевался до 2005 года. Суть этого эксперимента состояла в замене нескольких имущественных налогов (на имущество предприятий, на имущество физических лиц и земельного налога) единым налогом на недвижимость, базой которого является рыночная стоимость объекта недвижимости. Однако, проведение этого эксперимента столкнулось с целым рядом теоретических, методологических, организационных и юридических проблем, а его итоги оказались далеко не однозначными (см., например, [45]). Законодательные проекты о едином налоге на недвижимость несколько раз рассматривались в Госдуме, но их доработка продолжается до сих пор. Ниже мы покажем, что могут дать для анализа налогообложения недвижимости разработанные выше модели инвестиционных ожиданий.

7.3.1. Моделирование налога на недвижимость

В данной работе для оценки недвижимости мы будем использовать так называемый затратный метод, основанный на определении стоимости строительства аналогичного объекта за вычетом износа (потери стоимости под влиянием различных факторов). Специалисты по оценке недвижимости выделяют три основных типа износа:

1) физический износ, возникающий в ходе эксплуатации;

2) функциональный (моральный) износ, связанный с несоответствием функциональных характеристик объекта современным требованиям;

3) внешний (экономический) износ, обусловленный влиянием внешних факторов (например, изменениями экономической среды, физического окружения объекта, законодательными изменениями).

Отметим, что влияние износа на стоимость недвижимости может в условиях рынка иногда приводить к парадоксальным ситуациям: снижение стоимости в результате износа компенсируется увеличением спроса, либо за счет исторической или архитектурной ценности объекта. Заметим также, что понятие "износа" при оценке недвижимости отличается от амортизации, используемой для бухгалтерского и налогового учета и подчиняющейся строго установленным методам и нормам начисления. Поэтому остаточная стоимость зданий и сооружений, подсчитанная в соответствии с действующими методами и нормами амортизации, может существенно отличаться от их стоимости как объектов недвижимости.

Относительный износ (по отношению к полной восстановительной стоимости) за период t после создания предприятия (и его объекта недвижимости) можно характеризовать монотонно возрастающей (неубывающей) функцией $g_t : [0, \infty) \to [0, 1]$, такой что $g_0 = 0$. При этом в рамках нашей модели в качестве налога на недвижимость в момент $\tau + t$ для предприятия, созданного в момент τ, берется величина

$$\bar{p}^{\tau}_{\tau+t} = \gamma_{\text{недв}}(1 - \psi)(1 - g_t)I_{\tau+t}, \tag{7.1}$$

где $\gamma_{\text{недв}}$ есть ставка налога на недвижимость, а $(1-\psi)(1-g_{t-\tau})I_t$ есть остаточная (за вычетом износа) восстановительная стоимость неактивной части фондов по текущим рыночным ценам (сюда не включена стоимость земли, методика оценки которой еще далека от завершения).

Тем самым, в качестве налоговой базы налога на недвижимость выступает не остаточная стоимость имущества, а его полная восстановительная стоимость.

Как уже отмечалось, замена налога на имущество налогом на недвижимость оказывает двоякое воздействие на выплачиваемые предприятием налоги. С одной стороны, активная часть основных фондов выводится из-под налогообложения, а с другой — оставшиеся неактивные фонды оцениваются по рыночной стоимости (с учетом износа). Хотя имущественные налоги поступают в региональный бюджет, они изменяют оптимальное поведение инвестора (поскольку меняется его NPV и, следовательно, оптимальный момент инвестирования) и тем самым изменяют налоговые поступления в федеральный бюджет. Таким образом, замена схемы налогообложения имущества ведет к изменениям налоговых поступлений в бюджеты *всех уровней.*

7.3.2. Критерии сравнения различных имущественных налогов

Для сравнения двух схем имущественного налога — традиционного налога на имущество и описанного выше налога на недвижимость — будут использованы те же показатели, связанные с инвестиционным проектом, что и раньше: оптимальный уровень инвестирования p^*, оптимальный NPV инвестора $\mathcal{N}$, ожидаемые приведенные налоговые поступления в федеральный и региональный бюджеты $\mathcal{T}^f$ и $\mathcal{T}^r$ (при оптимальном поведении инвестора). Для того, чтобы отличать одну схему налогообложения от другой мы в данном разделе будем снабжать чертой вверху показатели, относящиеся к схеме с налогом на недвижимость ($\bar{p}^*$, $\bar{\mathcal{N}}$ и т.п.).

Прежде всего, приведем явные формулы для этих показателей, аналогичные тем, что были выведены в разделе 1.6.3.

Нетрудно проверить, что

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{E}_\tau \bar{p}^\tau_{\tau+t} e^{-\rho t}\,dt = \frac{\gamma_{\text{недв}}}{\rho-\alpha_I}(1-\psi)(1-G)I_\tau, \quad \text{где} \ \ G = \int\limits_0^\infty g'_t e^{-(\rho-\alpha_I)t} dt.$$

Будем далее обозначать

$$\Lambda = \frac{\gamma_{\text{недв}}}{\rho-\alpha_I}(1-\psi)(1-G), \quad \bar{u} = \gamma_{\text{пр}} K - (1-\gamma_{\text{пр}})\Lambda. \tag{7.2}$$

Тогда, совершенно аналогично формулам из Теоремы 1.1 и Следствия 1.1 можно вывести следующие соотношения для описанных выше показателей в условиях налогообложения недвижимости:

$$\bar{p}^* = \tilde{p}(1-\bar{u}); \tag{7.3}$$

$$\bar{\mathfrak{N}} = \frac{I^{1-\beta}\pi_0^{\beta}}{\beta-1}(\tilde{p})^{-\beta}(1-\bar{u})^{1-\beta}; \tag{7.4}$$

$$\bar{\mathfrak{T}}^r = I^{1-\beta}\pi_0^{\beta}(\tilde{p})^{-\beta}(1-\bar{u})^{-\beta}[q^r(1-\bar{u}) - \gamma^r_{\text{пр}}K + (1-\gamma^r_{\text{пр}})\Lambda]; \tag{7.5}$$

$$\bar{\mathfrak{T}}^f = I^{1-\beta}\pi_0^{\beta}(\tilde{p})^{-\beta}(1-\bar{u})^{-\beta}[q^f(1-\bar{u}) - \gamma^f_{\text{пр}}(K+\Lambda)], \tag{7.6}$$

где $K = \psi A + (1-\psi)B$ — приведенная плотность амортизации (см. (1.25)), а q^r, q^f, $\tilde{p}$ определены в (1.37), (1.38).

В качестве критериев сравнения берутся отношения описанных выше показателей, связанных с инвестиционным проектом, при разных схемах налогообложения имущества:

$$R^p = \frac{\bar{p}^*}{p^*}, \qquad R^f = \frac{\bar{\mathfrak{T}}^f}{\mathfrak{T}^f}, \qquad R^r = \frac{\bar{\mathfrak{T}}^r}{\mathfrak{T}^r}, \qquad R^N = \frac{\bar{\mathfrak{N}}}{\mathfrak{N}}. \tag{7.7}$$

Используя приведенные явные формулы из следствия 1.1 и (7.3)–(7.6), отношения (7.7) можно записать в следующем виде:

$$R^p = \frac{1-\bar{u}}{1-u}, \tag{7.8}$$

$$R^N = \left(\frac{1-\bar{u}}{1-u}\right)^{1-\beta}, \tag{7.9}$$

$$R^f = \left(\frac{1-\bar{u}}{1-u}\right)^{-\beta} \cdot \frac{q^f(1-\bar{u}) - \gamma^f_{\text{пр}}(K+\Lambda)}{q^f(1-u) - (1-h_1)u - h_2}, \tag{7.10}$$

$$R^r = \left(\frac{1-\bar{u}}{1-u}\right)^{-\beta} \cdot \frac{q^r(1-\bar{u}) - \gamma^r_{\text{пр}}K + (1-\gamma^r_{\text{пр}})\Lambda}{q^r(1-u) - h_1 u + h_2}, \tag{7.11}$$

где $\bar{u}$ и Λ определены в (7.2), а h_1, h_2 — в (1.36).

7.3.3. Результаты сравнения и расчетов

Из приведенных выше соотношений видно, что изменение инвестиционной активности при замене имущественных налогов связано с соотношением величин u и $\bar{u}$. Для того, чтобы в системе с налогом на недвижимость инвестор приходил бы раньше, чем в системе с налогом на имущество (т.е. $R^p < 1$) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\gamma_{\text{недв}}(1-\psi)(1-G)}{\rho-\alpha_I} < \frac{\gamma_{\text{им}}(1-K)}{\rho-\theta\alpha_I}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\gamma_{\text{недв}}}{\gamma_{\text{им}}} \cdot \frac{\rho-\theta\alpha_I}{\rho-\alpha_I}(1-G) < 1-B+\frac{\psi}{1-\psi}(1-A).$$

Отсюда следует, что более раннее инвестирование при налоге на недвижимость происходит в случае, когда доля активной части фондов ψ превысит некоторый уровень $\widehat{\psi}$, равный

$$\widehat{\psi} = \max\left\{\frac{1-B-\psi_0}{A-B-\psi_0}, 0\right\}, \quad \text{где} \;\; \psi_0 = \frac{\gamma_{\text{недв}}}{\gamma_{\text{им}}} \cdot \frac{\rho-\theta\alpha_I}{\rho-\alpha_I}(1-G). \tag{7.12}$$

Критический уровень $\widehat{\psi}$ может, вообще говоря, быть и нулевым. Это означает, что более ранний приход инвестора при налоге на недвижимость будет происходить независимо от соотношения активных и неактивных фондов. Из соотношения (7.12) следует, что для положительности $\widehat{\psi}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\psi_0 < 1 - B$, которое можно преобразовать к виду:

$$G < 1 - \frac{\gamma_{\text{им}}}{\gamma_{\text{недв}}} \cdot \frac{\rho-\alpha_I}{\rho-\theta\alpha_I}(1-B).$$

Таким образом, положительная критическая граница доли активных фондов $\widehat{\psi}$ возникает лишь в случае, когда величина "приведенного износа" G невелика и сравнима с величиной "приведенной плотности амортизации" B неактивных фондов. Если же норма износа объекта недвижимости достаточно велика (по сравнению с его нормой амортизации), то переход к налогу на недвижимость будет стимулировать более ранний приход инвестора независимо от соотношения активных и неактивных фондов. Такая ситуация возникает, по-видимому, в случае, когда происходит быстрый функциональный и/или внешний износ недвижимости.

Заметим еще, что сам факт более раннего прихода инвестора в условиях налога на недвижимость (по сравнению с налогом на имущество) не зависит ни от параметров добавленной стоимости проекта α_π и σ_π, ни от зарплатоемкости $\tilde{\mu}$. В то же время, как видно из представления (7.9), отношение NPV инвестора при разных системах налогообложения имущества уже будет зависеть от параметров добавленной стоимости (через показатель β). При этом, если налог на недвижимость ведет к более раннему приходу инвестора (т.е. $R^p < 1$), то показатель R^N возрастает по β и, тем самым, согласно Утверждению 1.5, убывает по волатильности проекта $\tilde{\sigma}$ и по разности средних темпов роста добавленной стоимости и стоимости инвестиций $\Delta\alpha = \alpha_\pi - \alpha_I$. В ситуации, когда налог на недвижимость не стимулирует инвестора к более раннему приходу (возникающей при малых долях активных фондов $\psi < \widehat{\psi}$), показатель R^N будет возрастать по волатильности проекта $\tilde{\sigma}$ и по $\Delta\alpha$.

Что касается характера зависимости отношений ожидаемых поступлений в бюджеты R^f и R^r, то в общем случае он будет определяться соотношениями между различными параметрами модели, входящими в формулы (7.10)–(7.11). Как показали многочисленные расчеты, проведенные с использованием актуальных налоговых ставок, для широкого диапазона параметров добавленной стоимости и других параметров модели (более подробно описанных ниже) зависимости R^f и R^r от $\tilde{\sigma}$ и $\Delta\alpha$ соответствуют зависимостям показателя R^N от тех же параметров.

При проведении расчетов брались следующие величины налоговых ставок:

- на прибыль предприятий $\gamma_{\text{пр}} = 20\%$, при этом $\gamma^f_{\text{пр}} = 3\%$, $\gamma^r_{\text{пр}} = 17\%$;
- на добавленную стоимость $\gamma_{\text{НДС}} = 18\%$;
- на имущество и на недвижимость $\gamma_{\text{им}} = \gamma_{\text{недв}} = 2.2\%$;
- на фонд оплаты труда (страховые взносы) $\gamma_{\text{соц}} = 30\%$, при этом к федеральному бюджету мы относили отчисления в Пенсионный Фонд РФ по ставке $\gamma^f_{\text{соц}} = 20\%$;
- на доходы физических лиц $\gamma_{\text{фл}} = 13\%$.

Параметры инвестиционных проектов рассматриваются из диапазонов: $\alpha_I = 0$, $\sigma_I = 0$ (постоянные инвестиции), средние темпы изменения добавленной стоимости α_π от 0% до 3%, волатильность $\sigma_\pi \sim 0.05$–0.5, в качестве дисконта берется $\rho = 10\%$. Для схемы амортизации мы брали линейный метод с нормами амортизации 3% для неактивной части фондов и 20% для активной части фондов.

В качестве функции износа взята экспоненциальная $g_t = 1 - e^{-\eta_c t}$ с показателем $\eta_c = 0.01$. Такая функция достаточно хорошо соответствует одной из методик определения физического износа зданий, согласно которой годовой прирост физического износа новых зданий составляет 1.1% в течение первого десятилетия и 0.7% в последующие годы.

Отметим, что для рассмотренных данных пороговое значение доли активных фондов $\widehat{\psi}$, при котором налог на недвижимость вызывает более ранний приход инвестора, равно 0.48.

В Таблице 7.5 приведены значения отношений (7.7) при различных показателях роста и волатильности для технически оснащенного проекта с малой зарплатоемкостью ($\psi = 0.8,\ \tilde{\mu} = 0.2$). В этом случае налогообложение недвижимости вместо налога на имущество является стимулом для инвестора.

Таблица 7.5. Большая доля активных фондов

α_π	Показатели	$\sigma_\pi = 0.05$	$\sigma_\pi = 0.5$
0%	R^p	0.97	0.97
	R^N	1.24	1.01
	R^f	1.24	1.01
	R^r	1.27	1.04
1%	R^p	0.97	0.97
	R^N	1.14	1.01
	R^f	1.14	1.01
	R^r	1.17	1.04
2%	R^p	0.97	0.97
	R^N	1.08	1.01
	R^f	1.08	1.01
	R^r	1.11	1.04
3%	R^p	0.97	0.97
	R^N	1.05	1.01
	R^f	1.05	1.01
	R^r	1.08	1.03

В Таблице 7.6 приведены аналогичные результаты для другого крайнего случая — "слабо технически оснащенного" проекта с высокой зарплатоемкостью ($\psi = 0.2,\ \tilde{\mu} = 0.6$). В этом случае налогообложение недвижимости вместо налога на имущество уже не оказывает стимулирующего воздействия на инвестора.

Таблица 7.6. Малая доля активных фондов

α_π	Показатели	$\sigma_\pi = 0.05$	$\sigma_\pi = 0.5$
0%	R^p	1.02	1.02
	R^N	0.85	0.99
	R^f	0.85	0.99
	R^r	0.83	0.97
1%	R^p	1.02	1.02
	R^N	0.90	0.99
	R^f	0.90	0.97
	R^r	0.89	0.97
2%	R^p	1.02	1.02
	R^N	0.94	0.99
	R^f	0.94	0.99
	R^r	0.92	0.97
3%	R^p	1.02	1.02
	R^N	0.96	0.99
	R^f	0.96	0.99
	R^r	0.94	0.97

Проведенные расчеты позволяют сделать ряд выводов относительно сравнения разных систем налогообложения имущества по отношению к инвестиционным проектам создания новых предприятий, характерной особенностью которых является возможность выбора момента инвестирования.

Технически высоко оснащенные проекты (с большой долей активных фондов). В таких проектах переход на налогообложение недвижимости оказывает стимулирующее действие на инвестора и может значительно влиять на показатели (7.3)–(7.6). Однако поведение этих показателей сильно зависит от волатильности добавленной стоимости и менее сильно от ее среднего темпа роста. Так, при малых волатильности (порядка 0.05) и среднем темпе роста (порядка

1%) при налоге на недвижимость NPV инвестора и ожидаемые налоговые поступления в федеральный и региональный бюджеты могут быть на 15–25% выше, чем при налогообложении имущества. При этом приращение регионального бюджета оказывается немного больше, чем федерального. При больших волатильностях добавленной стоимости относительные изменения всех показателей становятся совсем незначительными и не превышают нескольких процентов.

Для *технически слабо оснащенных проектов* (с малой долей активных фондов) замена налога на имущество налогом на недвижимость играет отрицательную роль, ухудшая все рассматриваемые показатели (7.3)–(7.6). Инвестор при этом будет приходить позже, его NPV, а также ожидаемые налоговые поступления в федеральный и региональный бюджеты могут быть до 15% меньше (особенно при малых среднем темпе роста и волатильности добавленной стоимости). При возрастании волатильности изменения всех показателей становятся практически незаметными.

7.4. Сравнительный анализ налоговых льгот в ТОР и ОЭЗ

В данном разделе покажем, как в рамках описанных выше моделей инвестиционных ожиданий можно провести сравнение актуальных систем налогообложения, существующих на территориях с особым режимом организации производства и управления: территориях опережающего социально-экономического развития (ТОР) и в особых экономических зонах (ОЭЗ) технико-внедренческого и промышленно-производственного типа.

7.4.1. Территории льготного налогообложения

История российских особых экономических зон (ОЭЗ) началась в 1990-е годы, когда субъектам федерации были предоставлены значительные полномочия в административной и экономической самостоятельности. Только с июля 1990 г. по июнь 1991 г. в России было открыто 13 свободных экономических зон. Они создавались по решению местных властей. Как правило, на их территории резиденты освобождались от уплаты региональных налогов, но были обязаны переводить определенные суммы в местный бюджет. Зоны рассматривались как некий феномен, альтернативный неэффективной централизованной системе хозяйствования. Однако, надежды на то, что такие "налоговые оазисы" будут способствовать развитию малого и среднего бизнеса в регионах, а также существенно пополнять региональные бюджеты, в целом не оправдались. Отсутствие общего законодательства в этой сфере приводило к ряду коллизий организационно-правового характера. Фирмы зачастую использовали механизм ОЭЗ как средство построения сложных схем с целью минимизации своих налогов и платежей в бюджет. Недобросовестное ведение предпринимательской деятельности привело к огромным потерям и в определенной степени к дискредитации идеи ОЭЗ в России [26].

Новый этап развития ОЭЗ наступил в 2005 г. с принятием Закона от 22.07.2005 №116-ФЗ "Об особых экономических зонах в Российской Федерации", который закрепил правовое положение ОЭЗ и детально регламентировал их деятельность. Согласно этому Закону, в России были введены три типа особых экономических зон: промышленно-производственные, технико-внедренческие и туристско-рекреационные, позже к ним добавились еще и портовые.

Закон вводил ряд ограничений на территорию ОЭЗ, состав участников, вид деятельности резидентов, их обязанности в осуществлении инвестиций. Взамен резидентам предоставлялась широкая система льгот, относящихся к таможенному и налоговому режимам, финансированию инфраструктуры, администрированию, гарантиям от неблагоприятного изменения налогового законодательства. Так, резиденты всех ОЭЗ на пять лет освобождались от налогов на имущество и землю; они имели право выплачивать пониженную ставку налога на прибыль, зачисляемого в региональные бюджеты, могли экономить на расходах по НИОКР, включая их в полном размере в состав прочих расходов. Для промышленно-производственных и туристско-рекреационных ОЭЗ при расчете налога на прибыль дополнительно предусматривалась ускоренная амортизация основных фондов (с коэффициентом не выше двух) и полный перенос убытков предыдущего налогового периода на текущий период. Ставка единого социального налога (с 2010 г. — страховые взносы) в технико-внедренческих ОЭЗ снижалась до 14%.

Хотя с фискальной точки зрения государство регулярно недополучало в бюджет суммы, связанные с данными льготами, но были надежды на то, что активизация предпринимательской деятельности, создание новых предприятий позволят привлечь в экономику иностранные инвестиции, повысить занятость населения, улучшить политический климат. Считалось, что механизм ОЭЗ может стать эффективным средством государственной поддержки бизнеса и даже движущей силой экономического роста в России. Среди успешно работающих (в плане привлечения инвестиций и резидентов) ОЭЗ можно отметить такие, как Алабуга, Липецк (промышленно-производственные), Дубна, Томск, Зеленоград (технико-внедренческие). Однако надежды на эффективную деятельность зон оправдались лишь частично. Согласно отчету о проверке работы ОЭЗ, проведенной Счетной палатой в 2013 г., промышленно-производственные и технико-внедренческие зоны были признаны эффективными условно, в то время как туристско-рекреационные и портовые — неэффективными [73]. В 2016 г. Президент РФ поручил приостановить создание новых зон, а также завершить работу десяти действующих ОЭЗ (в первую очередь, туристско-рекреационных и портовых). При этом оставшиеся ОЭЗ переданы в управление регионам.

Как своего рода реинкарнацию особых экономических зон можно рассматривать принятие федерального Закона от 29.12.2014 № 473-ФЗ "О территориях опережающего социально-экономического развития в РФ". Первые три года территории опережающего развития (ТОР) могут создаваться только на Дальнем Востоке и в Восточной Сибири (в ДФО), а по мере накопления опыта — и в других регионах, в частности, на Урале, в Алтайском крае, Кемеровской и Ростовской областях. Цели и льготы, предоставляемые резидентам ТОР, во многом аналогичны тем, что были в ОЭЗ. Так, ставка налога на прибыль в федеральный бюджет устанавливается нулевой, а в региональный бюджет — не более 5% в течение первых пяти лет функционирования предприятия и не менее 10% в следующие пять лет. Нулевым становится налог на землю (в первые три года) и имущество; страховые взносы на 10 лет снижаются до 7.6%; упрощается порядок возврата налога на добавленную стоимость.

В целом налоговые льготы для инвесторов в ТОР выглядят более привлекательно, чем в особых экономических зонах. Тем не менее, многие исследователи рассматривают ТОР не как принципиально новое средство решения социально-экономических проблем отдельных территорий, а просто как "улучшенный" вариант ОЭЗ, в котором, правда, остался и ряд проблем, присущих старым ОЭЗ, и возникли некоторые новые (см. [37, 55]).

Список территорий льготного налогообложения и соответствующих льгот можно найти, например, на сайте Минэкономразвития РФ[32].

Из немногочисленных исследований по сравнительному анализу (на модельном уровне) различных территориальных систем налоговых льгот отметим работу [44], в которой авторы сравнивали воздействие разных систем налоговых льгот на финансовые результаты деятельности предприятия. Они выбрали одно из действующих предприятий Новосибирска, реализующее крупный инновационный проект, и гипотетически помещали его на одну из территорий с налоговыми льготами (ТОР, ОЭЗ, инновационный центр "Сколково"). В результате сценарного анализа было показано, что "размещение предприятия на территории ТОР обеспечивает не только наименьший уровень налоговой нагрузки…, но и наименьшую социальную обремененность" (там же, с. 29).

Казалось бы, чем больше предоставляется налоговых льгот, тем больше недополучает бюджет. И это действительно так, если речь идет о существующем налогоплательщике, который начинает платить меньше налогов. Однако проблема становится нетривиальной, если налогоплательщика (предприятия) пока еще не существует, и инвестор может выбирать момент его создания, дожидаясь наступления более благоприятной для этого ситуации. В этом случае при дополнительных льготах реализация инвестиционного проекта начинается раньше, и "выгоды" от более раннего поступления налоговых платежей в бюджет могут оказаться более значительными, чем косвенные потери от увеличения льгот. Подобные эффекты уже были установлены в предыдущих главах для других механизмов налоговых и неналоговых льгот.

---

[32] https://www.economy.gov.ru/material/directions/regionalnoe_razvitie/instrumenty_razvitiya_territoriy/.

7.4.2. Сценарии налоговых систем

Опишем три различные модели (сценарии) системы налогообложения с учетом основных налоговых льгот, принятых в ТОР и ОЭЗ технико-внедренческого (ТВОЭЗ) и промышленно-производственного (ППОЭЗ) типа. В этих сценариях будут учитываться следующие налоги: налог на добавленную стоимость, налог на прибыль, налог на имущество, страховые взносы и налог на доходы физических лиц. Другие налоги (земельный, транспортный, на добычу полезных ископаемых, акцизы и др.) не рассматриваются.

Сценарий 0 *(ТОР).* Ставка налога на прибыль, зачисляемого в федеральный бюджет, равна $\gamma^{f}_{\text{пр}}(0) = 0\%$, в региональный бюджет — $\gamma^{r}_{\text{пр}}(0, 1) = 5\%$ в течение первых пяти лет и $\gamma^{r}_{\text{пр}}(0, 2) = 10\%$ в течение вторых пяти лет. Налог на имущество равен нулю, страховые взносы взимаются по ставке $\gamma^{0}_{\text{соц}} = 7.6\%$.

Сценарий 1 *(ТВОЭЗ).* Ставка налога на прибыль, зачисляемого в федеральный бюджет, равна $\gamma^{f}_{\text{пр}}(1) = 0\%$, в региональный бюджет — $\gamma^{r}_{\text{пр}}(1) = 13.5\%$. Налог на имущество равен нулю, страховые взносы взимаются по ставке $\gamma^{1}_{\text{соц}} = 14\%$.

Сценарий 2 *(ППОЭЗ).* Ставка налога на прибыль, зачисляемого в федеральный бюджет, равна $\gamma^{f}_{\text{пр}}(2) = 0\%$, в региональный бюджет — $\gamma^{r}_{\text{пр}}(2, 1) = 0\%$ в течение первых пяти лет, и $\gamma^{r}_{\text{пр}}(2, 2) = 5\%$ в течение вторых пяти лет. Налог на имущество равен нулю, страховые взносы взимаются по ставке $\gamma^{2}_{\text{соц}} = 14\%$. Кроме того, разрешена ускоренная амортизация с коэффициентом 2 (действуют в ОЭЗ "Алабуга", похожие — в ОЭЗ "Липецк", "Тольятти").

Помимо перечисленных налогов, в сценариях присутствуют также налог на добавленную стоимость по ставке $\gamma_{\text{НДС}} = 18\%$ и налог на доходы физических лиц по ставке $\gamma_{\text{фл}} = 13\%$ (одинаковые во всех сценариях).

Согласно Бюджетному кодексу РФ, из указанных выше налогов в федеральный бюджет зачисляют налог на добавленную стоимость и федеральную часть налога на прибыль. Мы будем к ним добавлять страховые взносы, которые, хоть и не направляются в бюджет, но формируют Фонды общегосударственного значения. В региональный бюджет будут зачисляться региональная часть налога на прибыль, налог на имущество и налог на доходы физических лиц – работников предприятия.

7.4.3. Инвестиционный проект и изучаемые показатели

Рассматривается инвестиционный проект, направленный на создание и функционирование нового предприятия в реальном секторе.

Срок жизни проекта (существования предприятия) полагается равным $L = 10$ лет. Амортизационные отчисления определяются по линейному способу начисления, исходя из стоимости основных фондов, за которую принимается стоимость начальных инвестиций. При этом все фонды считаются активными.

Начальные инвестиции для реализации проекта I считались постоянными во времени, а динамика добавленной стоимости описывалась процессом геометрического броуновского движения со средним темпом α_π и волатильностью σ_π.

В качестве показателей, связанных с реализацией инвестиционного проекта при различных сценариях налогообложения, на основе которых будет проводиться сравнительный анализ, рассматриваются следующие (далее индексом $i, \quad i = 0, 1, 2$ будет указываться номер налогового сценария: 0 — ТОР, 1 — ТВОЭЗ, 2 — ППОЭЗ):

- оптимальный уровень инвестирования

$$\pi_i^* = I\frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\tilde{\rho}}{1 - \mu_i} \cdot \frac{1 - \gamma_{\text{пр}}(i,1)A_i^1 - \gamma_{\text{пр}}(i,2)A_i^2}{(1 - \gamma_{\text{пр}}(i,1))(1 - e^{-\tilde{\rho}\nu_i}) + (1 - \gamma_{\text{пр}}(i,2))(e^{-\tilde{\rho}\nu_i} - e^{-\tilde{\rho}L})},$$

определяющий оптимальный момент прихода инвестора (правило инвестирования);

- ожидаемые налоговые поступления в федеральный бюджет (при оптимальном поведении инвестора), приведенные к нулевому моменту времени

$$\mathcal{T}_i^f = \left(\frac{\pi_0}{\pi_i^*}\right)^\beta \left[\pi_i^* \cdot \frac{\gamma_{\text{НДС}} + \tilde{\mu}\gamma_{\text{соц}}^i + (1 - \mu_i)\gamma_{\text{пр}}^f(i)}{\tilde{\rho}} - I\gamma_{\text{пр}}^f(i)(A_i^1 + A_i^2)\right];$$

- ожидаемые налоговые поступления в региональный бюджет (при оптимальном поведении инвестора), приведенные к нулевому моменту времени

$$\mathcal{T}_i^r = \left(\frac{\pi_0}{\pi_i^*}\right)^\beta \left\{\pi_i^* \cdot \frac{\tilde{\mu}\gamma_{\text{фл}} + (1{-}\mu_i)\left[\gamma_{\text{пр}}^r(i,1)(1{-}e^{-\tilde{\rho}\nu_i}) + \gamma_{\text{пр}}^r(i,2)(e^{-\tilde{\rho}\nu_i}{-}e^{-\tilde{\rho}L})\right]}{\tilde{\rho}} - \right.$$
$$\left. -I[\gamma_{\text{пр}}^r(i,1)A_i^1 + \gamma_{\text{пр}}^r(i,2)A_i^2]\right\},$$

где β есть положительный корень уравнения $\frac{1}{2}\sigma_\pi^2\beta(\beta-1) + \alpha_\pi\beta - \rho = 0$,

$\tilde{\rho} = \rho - \alpha_\pi, \quad \mu_i = (1 + \gamma_{\text{соц}}^i)\tilde{\mu}, \quad \gamma_{\text{пр}}(i,1) = \gamma_{\text{пр}}^f(i) + \gamma_{\text{пр}}^r(i,1),$

$\gamma_{\text{пр}}(i,2) = \gamma_{\text{пр}}^f(i) + \gamma_{\text{пр}}^r(i,2), \quad \nu_0 = \nu_2 = 5, \quad \nu_1 = 10, \quad L = 10,$

$A_i^1 = (1{-}e^{-\tilde{\rho}\nu_i})/L \ \ (i = 0,1), \quad A_2^1 = 2(1{-}e^{-\tilde{\rho}\nu_i})/L, \quad A_0^2 = (e^{-\tilde{\rho}\nu_i} - e^{-\tilde{\rho}L})/L,$

$A_1^2 = A_2^2 = 0.$

7.4.4. Результаты расчетов

По представленной выше модели инвестиционного проекта и трем налоговым сценариям были проведены многочисленные расчеты и сравнения.

В качестве базовых точек модели брались "маленькие" и "большие" значения среднего темпа роста добавленной стоимости , а также маленькие и большие значения зарплатоемкости проекта $\tilde{\mu}$ (доли фонда оплаты труда в добавленной стоимости), дисконт ρ полагался равным 10%. Для проектов с этими значениями параметров проводилось сравнение уровня инвестирования, приведенных поступлений в федеральный и региональный бюджеты при различных значениях волатильности проекта σ_π для трех описанных выше налоговых сценариев (соответствующих ТОР и ОЭЗ технико-внедренческого и промышленно-производственного типа). Ниже приводится описание результатов расчетов на "качественном" уровне.

Оптимальные уровни инвестирования π_i^* оказались во всех сценариях очень близкими друг другу при всех рассмотренных значений параметров модели. Более того, между ними всегда сохранялся определенный порядок: наименьший уровень был в ТОР, а наибольший — в ТВОЭЗ, причем с ростом волатильности разрыв между уровнями в ТОР и ППОЭЗ увеличивался, а между

ППОЭЗ и ТВОЭЗ почти не менялся. Поскольку оптимальный уровень инвестирования зависит от "общей налоговой нагрузки", то этот результат согласуется и с выводами работы [44] о меньшем уровне налоговой нагрузки в ТОР по сравнению с ОЭЗ и "Сколково". Так как уровень π_i^* характеризует время прихода инвестора на проект, то из полученных результатов можно заключить, что ТОР и ОЭЗ разных типов обладают практически одинаковыми возможностями в отношении времени прихода инвестора (или ожидания инвестирования проекта), однако в ТОР инвестор придет все же немного быстрее, чем в ОЭЗ. Ускорение прихода инвестора можно также интерпретировать как некоторое возрастание "потенциальной инвестиционной активности" в ТОР по сравнению с ОЭЗ. И с ростом неопределенности различие в этой активности будет увеличиваться.

Соотношения между другими показателями — ожидаемыми налоговыми поступлениями в федеральный и региональный бюджеты при разных сценариях налоговых льгот уже зависят от значений параметров инвестиционного проекта: среднего темпа роста добавленной стоимости α_π, зарплатоемкости $\tilde{\mu}$, а также волатильности σ_π.

Налоговые поступления в федеральный бюджет. Если средний темп роста добавленной стоимости проекта α_π достаточно высок (порядка 5%), то наибольшие поступления будет давать реализация проекта в ППОЭЗ. Если же средний темп роста добавленной стоимости проекта достаточно мал (порядка 1%), то наилучший налоговый сценарий (для федерального бюджета) будет зависеть от волатильности проекта σ_π. При малых значениях волатильности, не превышающих некоторого порога, наибольшие поступления в федеральный бюджет будут в ТОР, а при высоких волатильностях — в ППОЭЗ. В то же время для проекта с малыми значениями α_π и $\tilde{\mu}$ реализации проектов в ППОЭЗ и ТОР будут приносить примерно одинаковые налоговые поступления в федеральный бюджет, а при малом α_π и большом $\tilde{\mu}$ (порядка 0.7) поступления от реализации в ППОЭЗ и ТВОЭЗ будут почти одинаковыми.

Налоговые поступления в региональный бюджет. Здесь наилучший налоговый сценарий более чувствителен к параметрам инвестиционного проекта, чем в случае федерального бюджета. Если средний темп роста добавленной стоимости проекта достаточно мал (порядка 1%), также как и зарплатоемкость проекта (порядка 0.2), то ТОР будет давать наибольшие налоговые поступления от реализации проекта в региональный бюджет только при малых значениях волатильности σ_π, а при больших волатильностях наилучшим сценарием будет ТВОЭЗ. Та же картина наблюдается в случае больших значений среднего темпа роста добавленной стоимости проекта α_π (порядка 5%) и зарплатоемкости (порядка 0.7). При малых значениях волатильности лучшим сценарием оказывается ТОР, а при высоких — ТВОЭЗ. ТОР остается лучшим сценарием и для случая, когда средний темп роста добавленной стоимости проекта достаточно мал (порядка 1%), а зарплатоемкость проекта велика (порядка 0.7). В то же время ТВОЭЗ будет давать наибольшие налоговые поступления в случае, когда средний темп роста добавленной стоимости проекта α_π достаточно высок (порядка 5%), а зарплатоемкость мала (порядка 0.2). Отметим еще, что при малых значениях α_π и $\tilde{\mu}$ ППОЭЗ и ТВОЭЗ будет приносить примерно одинаковые налоговые поступления в региональный бюджет.

Изложенные результаты наглядно изображены в Таблице 7.7. В ней на качественном уровне представлены лучшие сценарии налоговых льгот с точки зрения ожидаемых приведенных налоговых поступлений от реализованного проекта в федеральный и региональный бюджеты в зависимости от среднего темпа роста добавленной стоимости проекта α_π, доли заработной платы в добавленной стоимости $\tilde{\mu}$, а также волатильности проекта σ_π.

Таблица 7.7. Лучшие по бюджетам сценарии среди ТОР и ОЭЗ

Параметры проекта	Федеральный бюджет	Региональный бюджет
Малое α_π, малое $\tilde{\mu}$	ТОР (малое σ_π) ППОЭЗ (большое σ_π)	ТОР (малое σ_π) ТВОЭЗ (большое σ_π)
Малое α_π, большое $\tilde{\mu}$	ТОР (малое σ_π)	ТОР (малое σ_π)
Большое α_π, малое $\tilde{\mu}$	ППОЭЗ	ТВОЭЗ
Большое α_π, большое $\tilde{\mu}$	ППОЭЗ	ТОР (малое σ_π) ТВОЭЗ (большое σ_π)

Заключение

В завершение подведем итоги и остановимся на возможных направлениях развития данного диссертационного исследования, целью которого было изучение возможностей стимулирования реализации инвестиционных проектов в реальном секторе.

I. В результате проведенного исследования получены следующие основные результаты.

1. *Разработан единый теоретический подход к исследованию потенциальных возможностей различных налоговых и неналоговых механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов в реальном секторе.*

В основе единого подхода лежит предложенная автором общая схема описания инвестирования проектов в условиях неопределенности, общая методология исследования стимулирования их реализации с помощью различных существующих механизмов, использование общего математического инструментария.

2. *Построена модель инвестирования проектов в условиях неопределенности (модель ожидания инвестиций, модель инвестиционных ожиданий).*

Такие модели предназначены для исследования эффектов, связанных с гибкостью инвестиционных решений, а именно, с возможностью отложить инвестирование проектов до наступления наиболее благоприятной для этого ситуации. Основными особенностями рассматриваемых в данной работе проектов (например, создания новых предприятий в реальном секторе) являются неопределенный характер денежных потоков реализованного проекта, а также возможность выбора момента его инвестирования в зависимости от складывающейся для инвестора ситуации. При этом решение об инвестировании принимается только по экономическим показателям, связанным с данным проектом, на основе критерия ожидаемого чистого приведенного дохода (NPV).

Предполагается, что реализация проекта после инвестирования происходит в рамках российской системы налогообложения предприятий, представленной в работе налогами на прибыль, на добавленную стоимость, на имущество, страховыми взносами, а также налогом на доходы физических лиц (работников предприятия) и системой амортизационных отчислений. Объем инвестиций, необходимых для реализации проекта, и добавленные стоимости моделируются случайными процессами диффузионного типа. В модели присутствует около двух десятков различных параметров, связанных со ставками налогов (в федеральный и региональный бюджет), нормами амортизации (активных и неактивных фондов), показателями среднего темпа роста и волатильности добавленной стоимости и необходимых инвестиций.

Выведены явные формулы для оптимального момента инвестирования проекта (по критерию NPV инвестора), а также других показателей, связанных с рассматриваемым проектом: ожидаемого NPV инвестора, ожидаемых приведенных налоговых поступлений от реализованного проекта в федеральный и региональный бюджеты, среднего времени ожидания инвестирования проекта.

Показано, что используемая в работе схема подсчета посленалоговых денежных потоков, основанная на принципе "полного возмещения" убытков, является достаточно хорошей аппроксимацией применяемой на практике схемы "реального возмещения" убытков, связанной с переносом убытков на будущее с учетом количественных ограничений.

Указаны возможные расширения модели, учитывающие лаг капитальных вложений, политику возврата НДС на этапе создания предприятия, а также процесс риска, связанный с частичными потерями чистой прибыли инвестора в случайные моменты времени после инвестирования.

3. *На основе разработанной модели инвестирования проектов в условиях неопределенности и ожидания финансирования проведен модельный анализ налоговых новаций, осуществлявшихся или "потенциально возможных" в России в начале XXI века.*

3.1. Сделан сравнительный анализ двух систем налогообложения прибыли российских предприятий. Одна из них, "старая", действовала в России до конца 2001 г. Ее особенностями были высокая ставка налога на прибыль предприятий (35%), налоговые каникулы для вновь созданных предприятий и ускоренная амортизация активной части основных фондов. С 2002 г. была введена в действие новая система налогообложения прибыли, в которой отменялись налоговые каникулы для новых предприятий и ускоренная амортизация, но ставка налога на прибыль снижалась (сначала до 24%, а с 2009 г. — до 20%).

Сравнение проводилось для различных инвестиционных проектов создания новых предприятий, разбитых на несколько групп в зависимости от доли активной части фондов, которая может характеризовать "техническую оснащенность" проекта (машинами, механизмами и т.п.), и "зарплатоемкость" проекта (долю фонда оплаты труда в добавленной стоимости).

В качестве сравниваемых показателей рассматривались следующие:

– оптимальный уровень инвестирования, характеризующий момент прихода инвестора;

– ожидаемые налоговые поступления в федеральный и региональный бюджеты (при оптимальном поведении инвестора), приведенные к нулевому моменту времени;

– ожидаемый оптимальный чистый приведенный доход (NPV) инвестора от реализованного проекта.

Как показали проведенные расчеты, для проектов с высокой долей активных фондов при новой системе налогообложения инвестор приходит существенно раньше. Разница в ожидаемых налоговых поступлениях в федеральный бюджет при старой и новой системах уменьшается с ростом волатильности процесса добавленной стоимости, и при большой волатильности ожидаемые поступления в бюджет при различных системах будут примерно одинаковыми.

Для проектов с низкой долей активных фондов (где типичной является высокая "зарплатоемкость") время прихода инвестора, а также ожидаемые налоговые поступления в бюджеты отличаются незначительно при старой и новой системах налогообложения, особенно при больших волатильностях.

Дальнейшее снижение существующей ставки налога на прибыль предприятий способно увеличить ожидаемые налоговые поступления в консолидированный бюджет лишь для проектов с малой волатильностью и не очень высоким средним темпом роста добавленной стоимости, а для проектов с большой неопределенностью оно ведет только к уменьшению ожидаемых налоговых поступлений.

3.2. Проведен сравнительный анализ льготных систем налогообложения, существующих на отдельных территориях РФ: территориях опережающего социально-экономического развития (ТОР) и в особых экономических зонах технико-внедренческого (ТВОЭЗ) и промышленно-производственного (ППОЭЗ) типа. Рассмотрены три актуальных сценария системы налогообложения с учетом основных налоговых льгот, принятых в ТОР и в особых экономических зонах, которые учитывают существующие ставки налогов на добавленную стоимость, прибыль предприятий, имущество, налог на доходы физических лиц, страховые взносы, а также системы налоговых каникул и ускоренной амортизации.

Установлено, что ТОР и ОЭЗ разных типов обладают практически одинаковыми возможностями в отношении времени прихода инвестора (ожидания инвестирования проекта), однако в ТОР инвестор придет все же немного быстрее, чем в ОЭЗ, причем с ростом неопределенности это различие будет увеличиваться. Если средний темп роста добавленной стоимости проекта достаточно высок, то наибольшие поступления в федеральный бюджет будет давать реализация проекта в ППОЭЗ, а в региональный бюджет — ТВОЭЗ (при малой зарплатоемкости, а также при большой зарплатоемкости и большой волатильности) или ТОР (при большой зарплатоемкости и малой волатильности). В случае, когда средний темп роста и волатильность малы, наибольшие ожидаемые поступления как в федеральный, так и в региональный бюджет приносит реализация проекта в ТОР. Наконец, если средний темп роста и зарплатоемкость малы, а волатильность добавленной стоимости велика, наибольшие ожидаемые поступления в федеральный бюджет будут в ППОЭЗ, а в региональный бюджет — в ТВОЭЗ.

3.3. Рассмотрены сценарии снижения ставки НДС с 20% до 18% и 15%, которая прямо или косвенно (через изменение оптимального момента инвестирования) влияет на ожидаемые налоговые поступления от реализации инвестиционного проекта в бюджеты разных уровней. Показано, что влияние такого снижения существенным образом связаны с политикой возврата НДС за начальные инвестиции. При полном возврате НДС на капитальные вложения по окончании периода их освоения, в федеральный бюджет будет поступать меньше налогов (даже несмотря на более раннее инвестирование проекта), а в региональный бюджет — больше. При этом результаты слабо чувствительны к изменениям среднего темпа роста добавленной стоимости проекта и ее волатильности. Снижение ставки до 15% не приносит большого эффекта для регионального бюджета, а лишь увеличивает "недобор" в федеральный бюджет.

3.4. Проведен сравнительный анализ двух систем имущественных налогов: традиционного для российских предприятий налога на имущество, базой которого является остаточная стоимость основных фондов (движимого и недвижимого имущества), и налога на недвижимость, база которого — остаточная восстановительная стоимость неактивной части фондов по текущим рыночным ценам. Для сравнения были выбраны две группы инвестиционных проектов, характеризующиеся малой и большой долей "активных" фондов (в начальной стоимости всех основных фондов), при этом показатели роста и волатильности для каждой группы менялись в достаточно широком диапазоне. Как показали расчеты, переход к налогообложению недвижимости не повлечет за собой ни роста инвестиционной активности (более раннего прихода инвестора), ни значительных дополнительных поступлений в бюджеты разных уровней, исключение могут составить лишь проекты с большой долей активных фондов и малой волатильностью добавленной стоимости.

4. *Предложен новый подход к проблеме оптимизации параметров различных механизмов стимулирования, используемых при финансировании инвестиционных проектов.*

Основная предпосылка в данном подходе состоит в том, что государство при выборе механизма стимулирования полагает, что потенциальный инвестор будет поступать в соответствии с моделью ожидания инвестирования проектов в условиях неопределенности и выбирать правило (момент) инвестирования по критерию NPV. В свою очередь, зная зависимость оптимального правила инвестирования от параметров налоговой системы и механизма стимулирования, государство выбирает этот механизм (из класса допустимых), руководствуясь своим критерием.

В качестве такого критерия берется ожидаемый интегральный бюджетный эффект, который представляет собой разность ожидаемых налоговых поступлений в бюджет от реализованного проекта и ожидаемых затрат государства по использованию соответствующего механизма, приведенную к нулевому моменту времени. Оптимизационный подход состоит в выборе такого механизма, который максимизирует (по всем допустимым механизмам из заданного класса) ожидаемый интегральный бюджетный эффект.

Предлагаемый подход к выбору механизма стимулирования можно условно назвать государственно-ориентированным (или бюджетно-ориентированным), поскольку окончательный выбор делает государство, имея целью максимальное наполнение бюджета от реализации данного инвестиционного проекта.

Разработанный подход применен для исследования следующих механизмов стимулирования реализации инвестиционных проектов:

– налоговых каникул по налогу на прибыль предприятий;

– ускоренной амортизации;

– совместного финансирования проектов в условиях государственно-частного партнерства;

– концессионных соглашений;

– бюджетных субсидий на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционного проекта;

– государственных гарантий по кредитам, предоставляемым для привлечения инвестиций на рискованные проекты.

Для всех перечисленных механизмов стимулирования получены явные формулы для оптимальных значений соответствующих параметров, оптимального момента инвестирования, а также оптимальных ожидаемых NPV инвестора и налоговых поступлений в бюджеты от реализованного проекта.

Показано, что для всех рассмотренных механизмов стимулирования увеличение неопределенности ведет к более позднему инвестированию проектов.

5. *Подробно исследован механизм налоговых каникул по налогу на прибыль предприятий.*

Рассмотрены три типа налоговых каникул, основанных на используемых в российской практике принципах их назначения:

– детерминированной длительности;

– сроке окупаемости начальных инвестиций;

– уровне текущей прибыли.

Показано, что при наличии определенных правил переноса убытков на будущее во время налоговых каникул зависимость оптимального уровня инвестирования (характеризующего оптимальный момент инвестирования) и оптимального ожидаемого NPV от длительности налоговых каникул может иметь немонотонный характер. Это приводит к определенным парадоксальным эффектам при использовании механизма налоговых каникул для стимулирования инвестора, когда увеличение налоговых каникул может приводить к более позднему инвестированию, т.е. снижению инвестиционной активности, а также уменьшению ожидаемого NPV инвестора.

В случае нелинейного метода начисления амортизации показано, что весь диапазон возможных норм амортизации разбивается на три области, в которых каждый из указанных показателей либо монотонен по длительности налоговых каникул, либо имеет один экстремум. Установлено существование "наихудших" налоговых каникул, как с точки зрения момента инвестирования (максимум порога инвестирования), так и с точки зрения ожидаемого чистого приведенного дохода инвестора (минимум NPV).

Как показали проведенные расчеты, при "разумных" значениях норм амортизации оптимальный уровень инвестирования немонотонно зависит от длительности налоговых каникул, а "наихудшие" (для оптимального момента инвестирования) каникулы лежат в диапазоне от 3 до 5 лет. Для оптимального ожидаемого NPV инвестора немонотонная зависимость от длительности налоговых каникул возникает только при достаточно маленькой волатильности добавленной стоимости. При этом длительность "наихудших" (для NPV) налоговых каникул не превышает 3 лет и с ростом волатильности уменьшается до нуля.

В случае отсутствия убытков для модели инвестирования с ожиданием и одним агрегированным налогом выведены условия существования и явные формулы для оптимальных детерминированных налоговых каникул, обеспечивающих максимальный интегральный бюджетный эффект (в консолидированный или региональный бюджеты).

Исследована проблема согласования интересов инвестора (увеличение NPV) и государства (увеличение бюджетного эффекта) с помощью налоговых каникул. Найдены три области в пространстве параметров прибыли (среднего темпа прироста и волатильности) с разными типами зависимости ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет от длительности налоговых каникул. В одной области рост налоговых каникул выгоден инвестору и невыгоден государству (рассогласование интересов); в другой — рост длительности каникул всегда выгоден как инвестору, так и государству (полное согласование интересов); наконец, в третьей — рост каникул до оптимального значения выгоден и инвестору, и государству, а свыше этого значения невыгоден государству (условное согласование интересов).

Для каникул, основанных на сроке окупаемости, введено понятие модифицированного срока окупаемости как длительности такого интервала времени, по истечении которого отношение ожидаемой дисконтированной накопленной (за это время) прибыли к объему начальных инвестиций становится равным заданному нормативу окупаемости. Выведена формула для оптимального норматива окупаемости, при котором налоговые поступления от создаваемого предприятия в консолидированный бюджет будут максимальными.

Показано, что каникулы, основанные на текущей прибыли от реализованного проекта, длительность которых определяется первым моментом времени, когда отношение текущей прибыли к начальной (в момент инвестирования) превысит заданный уровень, дают такой же результат, как и детерминированные каникулы определенной длительности.

Проведено сравнение эффективности (для инвестора и бюджетов разных уровней) оптимальных налоговых каникул (детерминированных и основанных на модифицированном сроке окупаемости) не только для указанных выше типов, но и для их различных видов, связанных с полным или частичным освобождением от федеральной и/или региональной части налога на прибыль.

В случае полных освобождений от налога на прибыль (и в федеральный, и в региональный бюджеты) наиболее эффективными для инвестора являются каникулы на срок окупаемости, а для бюджетов (федерального и регионального) — каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости. Если освобождение от налога на прибыль предоставляет только регион, наиболее эффективными для инвестора будут каникулы на срок окупаемости, а для бюджетов (федерального и регионального) — каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости. Наконец, в случае частичных освобождений от налога на прибыль (нулевая федеральная ставка и пониженная региональная) сравнительная эффективность существенно зависит от среднего темпа роста прибыли и ее волатильности. При этом для инвестора наименее эффективными (из оптимальных) будут каникулы детерминированной длительности, а для федерального бюджета — каникулы, основанные на модифицированном сроке окупаемости. В то же время для регионального бюджета все типы каникул дают примерно одинаковый результат.

6. *Показано, что совместное использование ускоренной амортизации и налоговых каникул может приводить к парадоксальным эффектам, когда отдельные механизмы "мешают" друг другу, вызывая в ряде случаев контринтуитивное понижение инвестиционной активности.*

Установлено, что существуют три диапазона длительности налоговых каникул, для каждого из которых зависимость оптимального момента инвестирования от нормы амортизации будет существенно разной:

– малые каникулы (до 2 лет);

– средние каникулы (2–4 года);

– большие каникулы (свыше 4 лет).

В области "малых" налоговых каникул оптимальный момент инвестирования сначала убывает, а потом (когда норма амортизации превышает некоторый уровень) возрастает. Тем самым, ускоренная амортизация при наличии каникул небольшой длительности может приводить к замедлению прихода инвестора. Наиболее сложный вид зависимости возникает в области "средних" налоговых каникул. Здесь эффект снижения инвестиционной активности (увеличения оптимального момента инвестирования) имеет место в диапазоне, определяемом уже двумя критическими значениями нормы амортизации. Только при "больших" налоговых каникулах имеет место "интуитивно понятная" зависимость, когда увеличение нормы амортизации ведет к более раннему приходу инвестора.

Описаны три области в пространстве параметров проекта с разным типом зависимости ожидаемых приведенных налоговых поступлений в бюджет от нормы амортизации. В двух областях увеличение нормы амортизации наряду с более ранним инвестированием и увеличением NPV инвестора приводит к уменьшению ожидаемых приведенных налоговых поступлений (рассогласование интересов инвестора и государства) или к их увеличению (полное согласование интересов инвестора и государства). Наконец, в третьей области происходит условное согласование интересов инвестора и государства, поскольку одновременный рост NPV инвестора и ожидаемых налоговых поступлений в бюджет происходит только при условии, что норма амортизации не превышает оптимального значения, а при нарушении этого условия имеет место рассогласование интересов инвестора и государства.

Показано, что рост неопределенности может ограничивать возможности амортизационной политики как средства согласования интересов инвестора и государства. И наоборот, уменьшение неопределенности может сдвинуть параметры проекта в область согласования интересов и расширить возможности по привлечению инвестиций.

Как показали многочисленные расчеты, оптимальная амортизация способна принести значительный эффект (для федерального бюджета и для инвестора) для инвестиционных проектов, отличающихся:

1) высокой долей активных фондов;

2) умеренной зарплатоемкостью;

3) не очень большой волатильностью.

Для таких проектов оптимальная амортизация обладает и стимулирующим эффектом для инвестора, заставляя его начинать инвестирование раньше. В других случаях эффект от оптимальной нормы амортизации (на уровне федерального бюджета и инвестора) может быть не выражен вообще.

7. *Исследованы потенциальные возможности государственной поддержки инвестиционных проектов, реализуемых по схеме государственно-частного партнерства (ГЧП). Рассмотрены два механизма господдержки — совместное финансирование проектов и концессионные соглашения.*

7.1. В рамках механизма совместного финансирования процесс реализации инвестиционного проекта предполагается двухэтапным. На первом этапе создается инфраструктура, необходимая для реализации проекта (финансирование которой полностью берет на себя государство), а затем делаются инвестиции (с участием как государства, так и частного инвестора) для реализации собственно проекта.

Получена формула для оптимальной доли софинансирования государством инвестиционного проекта, описывающая ее зависимость от необходимых инвестиций в инфраструктуру и в сам проект, среднего темпа роста и волатильности прибыли, налоговой нагрузки, ограничений (сверху и снизу) на долю государственного финансирования

Показано, что оптимальная доля софинансирования возрастает с увеличением налоговой нагрузки и не превышает ее. При небольших налоговых нагрузках софинансирование невыгодно государству, а при больших — государству выгодно участвовать в совместном финансировании максимально возможным образом. Оптимальная доля будет не возрастать при увеличении среднего темпа роста прибыли и ее волатильности.

Показана возможность согласования интересов государства и инвестора при использовании механизма софинансирования проектов. Если оптимальная доля софинансирования больше нижней границы допустимых ограничений, то увеличение доли софинансирования (не выше оптимальной) ведет не только к более раннему инвестированию и росту ожидаемого NPV инвестора, но также и к росту ожидаемого интегрального бюджетного эффекта.

Как показали проведенные расчеты, оптимальная доля софинансирования, вытекающая из построенной модели (20–30%), достаточно близка к доле участия государства в реальных проектах, связанных со строительством аэропортов и дорог.

7.2. Изучены потенциальные возможности концессионной платы как механизма стимулирования инвестиций для реализации концессионного проекта типа BOT (Build–Operate–Transfer), направленного на создание, эксплуатацию и дальнейшую передачу государству нового производственного объекта.

Показано, что оптимальная концессионная плата убывает при увеличении налоговой нагрузки, а при больших налоговых нагрузках становится нулевой. Зависимость оптимального уровня инвестирования (с оптимальной концессионной платой) от налоговой нагрузки носит более сложный характер и определяется величиной самой нагрузки. В частности, вопреки интуитивным соображениям, увеличение налоговой нагрузки (в определенных пределах) в сочетании с оптимальной концессионной платой может ускорить приход инвестора.

Если государство уменьшает свое участие в финансировании проекта (до определенного уровня), то с помощью оптимальных концессионных платежей можно избежать более позднего прихода инвестора.

Показано, что величину оптимальной концессионной платы можно рассматривать как нижнюю границу для концессионной платы, выше которой имеет место согласование интересов государства и инвестора в том смысле, что снижение государством концессионной платы оказывается выгодным сразу всем участникам концессионного соглашения. А именно, не только ускоряется приход инвестора и увеличивается его NPV, но и возрастает интегральный бюджетный эффект.

8. *Исследован механизм бюджетных субсидий на уплату процентов по кредитам, предоставленным для реализации инвестиционного проекта.*

Выведена формула, описывающая в явной форме зависимость оптимальной величины субсидируемого процента от объема начальных инвестиций и доли в них собственных средств инвестора, условий по кредиту (сумма кредита, процент, график возврата), среднего темпа роста и волатильности прибыли, налоговой нагрузки, ставок дисконтирования для инвестора и государства.

Показано, что при маленькой налоговой нагрузке государству невыгодно предоставлять субсидии по кредиту, а с ее увеличением оптимальные субсидии будут увеличиваться (до максимально возможных). Использование оптимального субсидируемого процента может при определенных условиях приводить к более раннему инвестированию даже при увеличении налоговой нагрузки

Увеличение доли собственных средств инвестора приводит к возрастанию оптимального субсидируемого процента и к более раннему инвестированию проекта. Если прибыль проекта имеет большую волатильность или большой средний темп роста, государству выгодно уменьшать размер оптимальных субсидий.

Доказана возможность согласования интересов инвестора и государства с помощью механизма субсидирования уплаты процентов. А именно, если налоговая нагрузка превышает некоторое пороговое значение, то увеличение субсидируемого процента (до величины оптимальных субсидий) становится выгодным не только инвестору, но и государству с точки зрения интегрального бюджетного эффекта и более раннего инвестирования.

9. *Разработанная общая схема ожидания инвестирования проектов в условиях неопределенности использована для моделирования механизма государственных гарантий по кредиту для привлечения инвестиций на рискованные инвестиционные проекты.*

Такие проекты могут с некоторой вероятностью потерпеть неудачу после инвестирования, так и не начав функционировать (или просуществовав очень короткое время). Поскольку существует вероятность невозврата кредита (в случае неудачи проекта – дефолта инвестора), взятого для финансирования проекта, процентная ставка по кредиту может быть высокой. Для ее снижения и, тем самым, стимулирования инвестора государство гарантирует банку возврат (в случае неудачи) определенной доли предоставленного проекту кредита.

В модели присутствуют три участника (инвестор, банк и государство), каждый из которых преследует свои цели в данном проекте. При этом критерии каждого участника зависят не только от его собственного решения, но и от решений других. Государство, зная принципы выбора оптимальных решений другими участниками, определяет долю гарантированного возврата кредита, исходя из критерия ожидаемого интегрального бюджетного эффекта.

Доказано, что при достаточно общих предположениях существуют оптимальные решения участников — момент инвестирования проекта, процент по кредиту, доля возвращаемого по гарантии кредита. В случае, когда прибыль от проекта моделируется геометрическим броуновским движением, эти решения описываются явными формулами.

Показано, что оптимальная доля возврата кредита не возрастает по величине риска (вероятности неудачи проекта). При малых рисках (ниже порогового значения) государству выгодно предоставлять максимально допустимые гарантии по возврату кредита.

С ростом налоговой нагрузки оптимальная доля возврата кредита не убывает, а ее зависимость от параметров прибыли (среднего темпа прироста и волатильности) носит сложный характер и определяется величиной налоговой нагрузки. Получены нижние границы для налоговой нагрузки, при превышении которой государству выгодно гарантировать банку полный возврат кредита.

Если оптимальная доля возврата кредита превышает нижнюю допустимую границу, то увеличение доли возврата кредита (в определенных пределах) становится выгодным всем участникам, т.е. увеличивает значение критериев инвестора, банка и государства (согласование интересов). Показано, что если не существует априорных ограничений снизу на величину допустимых государственных гарантий по возврату кредита, а коэффициент налоговой нагрузки превышает некоторый уровень, то согласование интересов существует при любых параметрах модели, даже в случае, когда величина риска точно не известна.

Показано также, что относительная эффективность оптимального механизма гарантий по кредитам (по сравнению с отсутствием гарантий) увеличивается с ростом величины риска.

II. Остановимся кратко на возможных расширениях и перспективах предложенной общей схемы исследования реализации инвестиционных проектов с учетом ожидания финансирования в условиях неопределенности.

1) *Более сложный объект исследования.* В данной работе основной объект исследования – инвестиционный проект – имеет довольно простую структуру: он считается экзогенно заданным и осуществляется после своего финансирования, начиная с какого-то момента времени, выбираемого инвестором. Однако разработанный подход может применяться и для проектов более общего вида, которые могут, например, предусматривать возможности изменить масштаб проекта (в зависимости от складывающихся условий); провести многоэтапное инвестирование (с возможностью отказа от продолжения проекта); сделать вложения в будущее развитие проекта или закрыть проект (при неблагоприятной ситуации). Для исследования подобного рода "сложных" проектов, возможно, придется уже использовать теорию многократных остановок случайных процессов (optimal multiple stopping). Отметим, что хотя при этом рамки чисто аналитического исследования могут стать достаточно ограниченными, но остаются возможности "аналитико-численного" анализа исследуемых моделей.

2) Разработанный подход применим и для исследования *других механизмов стимулирования*, не представленных в данной работе. К ним можно отнести, например, инвестиционный налоговый кредит, который предполагает уменьшение в течение определенного периода и в определенных пределах налоговых выплат с последующим возвратом их и начисленных процентов. Такой механизм, по существу, близок к налоговым каникулам (неполным), хотя в отличие от них осуществляется на возмездной основе.

Другим механизмом стимулирования, похожим на рассмотренную в данной работе схему государственно-частного партнерства, является возвратное налоговое финансирование. Этот механизм предусматривает возврат инвестору в виде субсидий на инфраструктурные затраты части налогов, полученных в результате реализации нового инвестиционного проекта.

3) *Другие виды неопределенности.* Использование вероятностного подхода к описанию неопределенности в данной работе во многом обусловлено тем, что результаты, связанные с применением метода реальных опционов, и в первую очередь, нахождение оптимального момента инвестирования наиболее продвинуты, на наш взгляд, именно в рамках вероятностного подхода (теория оптимальной остановки). Однако, в последнее время для оценивания инвестиционных проектов активно развиваются исследования по синтезу теории реальных опционов и "нечетко-множественного" представления неопределенности (см., например, [29]). Хотя в этом направлении в основном рассматриваются опционы Европейского типа (модель Блэка–Шоулса), существуют работы (например, [174]), где "нечетко-множественный" или гибридный "нечетко-вероятностный" подход применяется для изучения опционов Американского типа, тесно связанных с выбором момента инвестирования и основанных на теории оптимальной остановки. Это открывает определенные возможности использования аппарата нечетких множеств (а не только случайных процессов) для описания и исследования эффектов, связанных с ожиданием (задержкой) инвестирования проектов.

4) Предложенная методология исследования момента принятия решения об инвестировании в условиях неопределенности и его стимулировании может быть использована и для *других классов задач.* Перечислим некоторые из них.

Для предприятия, действующего в условиях неопределенности, может возникнуть проблема выбора времени структурных изменений (например, перехода на инновационные технологии, входа на новые рынки и т.п.), существенно меняющих поток прибыли предприятия. К этой проблеме примыкает и задача выбора момента времени полной или частичной приватизации государственных предприятий, которая ведет к изменению прибыли и ее налогообложения. При этом государство может быть заинтересовано в структурных изменениях и стимулировать их (например, с помощью субсидий или иных механизмов). Некоторые результаты в этом направлении, опирающиеся на предложенный в данной работе подход, опубликованы в [19, 20].

Другой класс задач, для которых может быть использован разработанный метод, относится к проблеме компенсации (с помощью механизмов государственной поддержки и льгот) дополнительных расходов инвесторов, возникающих при реализации инвестиционных проектов в условиях "неблагоприятного инвестиционного климата", связанного, в частности, с высокими кредитными ставками, коррупцией и т.д. Здесь возникает проблема, можно ли с помощью существующих льгот добиться того, чтобы инвестор финансировал реализацию инвестиционных проектов в условиях "неблагоприятного инвестиционного климата", а не уходил бы в экономику с "нормальным инвестиционным климатом", но без всяких льгот. Как показали предварительные результаты (см. [13, 103]), при выполнении определенных условий ожидаемые потери инвестора могут быть скомпенсированы с помощью механизмов налоговых каникул и совместного финансирования проектов.

Список литературы

1. Абакумов Р.Г. Амортизационная политика: сущность, проблемы, направления совершенствования // Финансы и кредит. 2008. № 47(335). С. 55–59.
2. Ананиашвили Ю., Папава В. Налоги и макроэкономическое равновесие: лафферо-кейнсианский синтез. Стокгольм: CA&CC Press, 2010. 142 с.
3. Андрюшкевич О.А., Денисова И.М. Государственно-частное партнерство как фактор экономического развития // В кн.: "Анализ и моделирование экономических процессов"/ под ред. В.З. Беленького. М.: ЦЭМИ РАН, 2009. Вып. 6. С. 7–28.
4. Аркин В.И. Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки одномерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59. Вып. 2. С. 365–374.
5. Аркин В.И., Сластников А.Д. Оптимизация амортизационной политики для привлечения инвестиций в условиях неопределенности // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. Вып. 2. С. 17–33.
6. Аркин В.И., Сластников А.Д. Оптимизация налоговых каникул в стохастической модели создания нового предприятия // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42. Вып. 1. С. 68–79.
7. Аркин В.И., Сластников А.Д. Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы // Экономика и математические методы. 2007. Т. 43. Вып. 2. С. 76–100.
8. Аркин В.И., Сластников А.Д. Влияние налоговых каникул на создание новых предприятий в особых экономических зонах // Экономика и математические методы. 2007 Т. 43. Вып. 4. С. 101–108.
9. Аркин В.И., Сластников А.Д. Модельный анализ реформы налогообложения предприятий // Вестник РГНФ. 2007. № 1. С. 67–77.
10. Аркин В.И., Сластников А.Д. Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53. Вып. 3. С. 516–533.

11. Аркин В.И., Сластников А.Д. Пороговые правила остановки диффузионных процессов и задача Стефана // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446. № 3. С. 247–250.

12. Аркин В.И., Сластников А.Д. Моделирование механизма государственных гарантий и кредитной политики банка при инвестировании рискованных проектов // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50. Вып. 3. С. 105–118.

13. Аркин В.И., Сластников А.Д. Компенсация повышенных процентов за кредит с помощью механизмов государственной поддержки // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50. Вып. 4. С. 104–111.

14. Аркин В.И., Сластников А.Д. Оптимизация бюджетных субсидий при кредитовании инвестиционных проектов // Журнал Новой экономической ассоциации. 2016. № 1(29). С. 12–26.

15. Аркин В.И., Сластников А.Д. Сравнительный анализ различных принципов назначения налоговых каникул // Экономика и математические методы. 2016. Т. 52. Вып. 3. С. 78–91.

16. Аркин В.И., Сластников А.Д. Сравнительный анализ налоговых льгот в ТОР и ОЭЗ // Экономическая наука современной России. 2017. № 4. С. 78–87.

17. Аркин В.И., Сластников А.Д. Оптимизация концессионной платы в стохастической модели государственно-частного партнерства // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 4 (36). С. 31–47.

18. Аркин В.И., Сластников А.Д. Нелинейные эффекты при налоговом стимулировании инвестиций // Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. Вып. 1.

19. Аркин В.И., Сластников А.Д. Математическая модель частичной приватизации предприятия // Экономика и математические методы. 2020. Т. 56. Вып. 3. С. 92–103.

20. Аркин В.И., Сластников А.Д. Модель стимулирования приватизации предприятий // Экономика и математические методы. 2021. Т. 57. Вып. 2. С. 85–95.

21. Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В. Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизма амортизации. М.: EERC, 2002. 89 с.

22. Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В. Инвестирование в условиях неопределенности и задачи оптимальной остановки // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. Вып. 1. С. 3–33.

23. Аркин В.И., Сластников А.Д., Аркина С.В. Стохастические модели привлечения инвестиций в реальном секторе // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. Вып. 3. С. 433–457.

24. Аркин В.И., Сластников А.Д., Смоляк С.А. Оценка имущества и бизнеса в условиях неопределенности (проблемы "хвоста" и "начала") // Аудит и финансовый анализ. 2006. Вып. 1. С. 81–92.

25. Аркин В.И., Сластников А.Д., Шевцова Э.А. Налоговое стимулирование инвестиционных проектов в российской экономике. М.: РПЭИ/Фонд Евразия, 1999. 68 с.

26. Архипов А., Павлов П. Экономические зоны: достоинства и недостатки // Экономист. 2006. Вып. 11. С. 28–34.

27. Балацкий Е. В. Точки Лаффера и их количественная оценка // Мировая экономика и международные отношения. 1997. № 12. С. 85–94.

28. Балацкий Е. В. Анализ влияния налоговой нагрузки на экономический рост с помощью производственно-институциональных функции // Проблемы прогнозирования. 2003. № 2. С. 88–105.

29. Баранов А.О., Музыко Е.И., Павлов В.Н. Оценка эффективности инновационных проектов с использованием опционного и нечетко-множественного подходов. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2018. 336 с.

30. Бородин А.Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000. 639 с.

31. Бруссер П., Рожкова С. Государственно-частное партнерство: как "собрать все и поделить". Технология определения оптимальной доли участия инвестора в прибыли // Рынок ценных бумаг. 2007. № 3 (330). С. 50–56.

32. Бруссер П., Рожкова С. Государственно-частное партнерство – новый механизм привлечения инвестиций // Рынок ценных бумаг. 2007. № 2 (329). С. 29–33.

33. Будник В.А. Обоснование величины концессионных платежей по договорам

концессии на строительство // Проблемы современной экономики. 2013. № 4 (48). С. 334–337.

34. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11. С. 3–30.
35. Бухвалов А.В. Реальные опционы в менеджменте: введение в проблему // Российский журнал менеджмента. 2004. Т. 2. № 1. С. 3–32.
36. Бухвалов А.В. Реальные опционы в менеджменте: классификация и приложения // Российский журнал менеджмента. 2004. Т. 2. № 2. С. 27–56.
37. Бухвальд Е.М., Валентик О.Н. Территории опережающего развития: падение или иллюзия? // ЭТАП: экономическая теория, анализ, практика. 2015. № 2. С. 72–84.
38. Варнавский В.Г. Концессии в транспортной инфраструктуре: теория, практика, перспективы. М.: ИМЭМО РАН, 2002. 147 с.
39. Варнавский В. Государственно-частное партнерство в России: проблемы становления // Отечественные записки. 2004. № 6 (21).
40. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. 5-ое изд. М.: Поли Принт Сервис, 2015. 1300 с.
41. Вороновская О.Е. Схемы гарантирования кредитов малым предприятиям: модели и опыт / Препринт WP/2001/123. М.: ЦЭМИ РАН, 2001. 73 с.
42. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.
43. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
44. Горбачева Н.В., Унтура Г.А. Оценка воздействия налоговых преференций на финансовые результаты высокотехнологического бизнеса в России // Финансы и кредит. 2015. № 36. С. 19–32.
45. Горский И.В. Налог на недвижимость: за и против // Финансы. 2012. № 2. С. 37–39.
46. Государственно-частное партнерство. Государственно-частное партнерство

в зарубежных странах или как реализовать ГЧП в России. М.: Издание Совета Федерации, 2009. 130 с.

47. Грачева М.В. Проектный анализ: учет рисков. М.: Проспект, 2017. 176 с.
48. Гусаков С. В., Жак С. В. Оптимальные равновесные цены и точка Лаффера // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31. Вып. 4. С. 346–358.
49. Гусев А.Б. Налоги и экономический рост: теории и эмпирические оценки. М.: Экономика и право, 2003. 139 с.
50. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов. М.: Альпина Бизнес Букс, 2004.
51. Дерябина М. Государственно-частное партнерство: теория и практика // Вопросы экономики. 2008. № 8. С. 61–77.
52. Какаулина М.О. Графическая интерпретация кривой Лаффера с учетом налоговой «миграции» // Вестник УрФУ. Серия экономика и управление. 2017. Т. 16. № 3. С. 336–356.
53. Капитоненко В.В. Инфляционный сдвиг налоговой ставки на кривой Лаффера / В кн.: Экономика и технология. Межвузовский сборник научных трудов. М.: РЭА, 1994.
54. Качалов Р.М. Управление экономическим риском: теоретические основы и приложения. М., СПб.: Нестор-История, 2012. 248 с.
55. Кашина Н.В. Территории опережающего развития: новый инструмент привлечения инвестиций на Дальний Восток России // Экономика региона. 2016. Т. 12. Вып. 2. С. 569–585.
56. Кифак А. Концессия: международный опыт и украинское законодательство // Порты Украины. 2012. № 09 (121). С. 17–19.
57. Клейнер Г.Б., Тамбовцев В.Л., Качалов Р.М. Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегии, безопасность. М.: Экономика, 1997. 288 с.
58. Ковалишин Е.А., Поманский А.Б. Реальные опционы: оптимальный момент инвестирования // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. Вып. 2. С. 50–60.
59. Козырев А.Н. Использование реальных опционов в инновационных проектах // Безопасность Евразии. 2005. Т. 20. Вып. 2. С. 117–133.

60. Козырев А.Н., Макаров В.Л. Оценка стоимости нематериальных активов и интеллектуальной собственности. М.: РИЦ ГШ ВС РФ, 2003. 268 с.
61. Колесникова К.И. Частно-государственное партнерство: опыт зарубежных стран и перспективы для России // Научный вестник Ур АГС. 2008. № 3. С. 112–115.
62. Коростелкина И.А. Методика расчета налоговой нагрузки экономических субъектов // Международный бухгалтерский учет. 2014. № 32 (326). С. 41–51.
63. Лимитовский М. А. Инвестиционные проекты и реальные опционы на развивающихся рынках. М.: Дело, 2004. 528 с.
64. Лушин В. Реакция на кризис и ее последствия для реального сектора российской экономики // Вопросы экономики. 2011. № 1. С. 39–50.
65. Маккин Г. Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972. 184 с.
66. Малинина Т.А. Оценка налоговых льгот и освобождений: зарубежный опыт и российская практика / Научные труды Института экономической политики им. Е.Т. Гайдара. 2010. № 146Р.
67. Мовшович С.М., Соколовский Л.Е. Выпуск, налоги и кривая Лаффера // Экономика и математические методы. 1994. Т. 30. Вып. 3. С. 129–141.
68. Нестеренко Ю.Н. Налоговые льготы: новые подходы к установлению // Экономический журнал. 2017. № 2 (46). С. 36–49.
69. Новиков А.А., Ширяев А.Н. Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49. Вып. 2. С. 373–382.
70. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (Базовые математические модели). М.: Институт проблем управления РАН, 1998. 216 с.
71. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
72. Основные направления бюджетной, налоговой и таможенно-тарифной политики на 2020 год и на плановый период 2021 и 2022 годов. М.: Минфин РФ, 2020.

73. Отчет о результатах контрольного мероприятия Аудит эффективности использования государственных средств, направленных на создание и развитие особых экономических зон // Бюллетень Счетной палаты. 2014. № 3. С. 83–174.

74. Практика применения концессионных соглашений для развития региональной инфраструктуры. М.: Центр развития государственно-частного партнерства, 2014. 68 с.

75. Рекомендации по реализации проектов государственно-частного партнерства. Лучшие практики. М.: Министерство экономического развития РФ, 2016. 162 с.

76. Рожкова С. Анализ мирового опыта использования государственно-частного партнерства в различных отраслях экономики // Рынок ценных бумаг. 2008. № 1. С. 50–55.

77. Синельников-Мурылев С.Г., Шкребела Е.В. Совершенствование налога на прибыль в Российской Федерации в среднесрочной перспективе // Научные труды Института экономической политики им. Е.Т. Гайдара; № 149Р. М.: Изд-во Института Гайдара. 2011. 264 с.

78. Сластников А.Д. Оптимизация участия государства в софинансировании проектов в условиях государственно-частного партнерства // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46. Вып. 4. С. 69–81.

79. Сластников А.Д. Инвестирование рискованных проектов в условиях государственных гарантий по кредитам // Журнал Новой экономической ассоциации. 2014. № 4(24). С. 12–37.

80. Сластников А.Д. О некоторых парадоксальных эффектах механизма налоговых каникул // Экономика и математические методы. 2022. Т. 58. Вып. 3. С. 45–56.

81. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. Теория ожидаемого эффекта. М.: Наука, 2002. 182 с.

82. Смоляк С.А., Аркин В.И., Сластников А.Д. Нетрадиционная версия метода ДДП для оценки недвижимости в условиях неопределенности // Экономическая наука современной России. 2017. № 3(78). С. 87–104.

83. Соколов И., Малинина Т. Налоговые льготы: как измерить их эффективность? // Экономическое развитие России. 2017. Т. 24. № 10. С. 53–59.
84. Сысоев А.В. Амортизационная политика как фактор инвестиционного развития экономики // Проблемы прогнозирования. 2006. № 1. С. 61–70.
85. Ткаченко Д.Д. Моделирование оптимальных стратегий входа фирмы в отрасль (выхода из отрасли) // Terra Economicus. 2011. Т. 9. № 4. С. 148–152.
86. Тубина А.Л., Бруссер П.А., Соловьева М.Ю. Применение методов теории кооперативных игр в исследовании моделей частно-государственного партнерства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 5. 2007. Вып. 3. С. 170–180.
87. Чернов С.С., Фильченкова М.В. Оценка эффективности реализации проекта реконструкции котельной в рамках государственно-частного партнерства // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2015. № 3 (32). С. 109–114.
88. Цветков А.В. Стимулирование в управлении проектами. М.: Апостроф, 2001. 143 с.
89. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. 272 с.
90. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1, 2. М.: Фазис, 1998. 512 с., 544 с.
91. Ширяев А.Н. О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. М.: МИАН, 2007. 80 с.
92. Шпынова А.И. Кредитование малых и средних предприятий: зарубежный и российский опыт. М.: ПОЛПРЕД Справочники, 2009. 156 с.
93. Agliardi E. Taxation and Investment Decisions: A Real Options Approach // Australian Economic Papers. 2001. V. 40. No. 1. P. 44–55.
94. Alonso-Conde A., Brown C., Rojo-Suarez J. Public Private Partnerships: Incentives, Risk Transfer and Real Options // Review of Financial Economics. 2007. V. 16. No. 44. P. 335–349.
95. Alvarez L.H.R. Reward functionals, salvage values, and optimal stopping // Mathematical Methods in Operations Research. 2001. V. 54. No. 2. P. 315–337.

96. Alvarez L.H.R., Koskela E. Progressive Taxation, Tax Exemption, and Irreversible Investment under Uncertainty // Journal of Public Economic Theory. 2008. V. 10. No. 1. P. 149–169.

97. Amram M., Kulatilaka N. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World. Boston: Harvard Business School Press, 1999. 246 p.

98. Antunes A., Cavalcanti T., Villamil A. The Effects of Credit Subsidies on Development // Economic Theory. 2015. V. 58. P. 1–30.

99. Arkin V.I., Slastnikov A.D. Optimal tax depreciation in stochastic investment model // In: Stochastic and Global Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications. 2002. V. 59. P. 19–32.

100. Arkin V.I., Slastnikov A.D. Optimal stopping problem and investment models // In: Dynamic Stochastic Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 2004. V. 532. P. 83–98.

101. Arkin V.I., Slastnikov A.D. Optimal time to invest under tax exemptions // In: The Shiryaev Festschrift. From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. Springer-Verlag, 2006. P. 17–32.

102. Arkin V., Slastnikov A. The Effect of Depreciation Allowances on the Timing of Investment and Government Tax Revenue // Annals of Operations Research. 2007. V. 151. No. 1. P. 307–323.

103. Arkin V.I., Slastnikov A.D. A Mathematical Model of Investment Incentives // In: Prokhorov and Contemporary Probability Theory. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2013. V. 33. P. 29–41.

104. Arkin V.I., Slastnikov A.D. Real options and threshold strategies // IFIP Advances in Information and Communication Technology. 2016. V. 494. P. 78–88.

105. Arkin V.I., Slastnikov A.D. On the threshold strategies in optimal stopping problems for diffusion processes // Journal of Applied Probability. 2017. V. 54. Issue 3. P. 963–969.

106. Armada M.J.R., Pereira P., Rodrigues A. Optimal incentives to Early Exercise of Public-Private Partnership Investments under Constrained Growth // European Journal of Finance. 2012. V. 18. No. 5. P. 1–27.

107. Azevedo A., Pereira P.J., Rodrigues A. Foreign Direct Investment with Tax Holidays and Policy Uncertainty // International Journal of Finance & Economics. 2019. V. 24. No. 2. P. 727–739.

108. Berg M., Moore G. The choice of depreciation method under uncertainty // Decision Sciences. 1989. V. 20. No. 4. P. 643–654.

109. Berg M., De Waegenaere A., Wielhouwer J. Optimal tax reduction by depreciation: a stochastic model // Discussion Paper #102. CentER, Tilburg University, 1996. 16 p.

110. Berg M., De Waegenaere A., Wielhouwer J. Optimal Tax Depreciation with Uncertain Future Cash-Flows // European Journal of Operational Research. 2001. V. 132. No. 1. P. 197–209.

111. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. V. 81. No. 3. P. 637–657.

112. Brennan M.J., Schwartz E.S. Evaluating natural resource investments // Journal of Business. 1985. V. 58. No. 2. P. 135–157.

113. Cheah C., Liu J. Valuing Governmental Support in Infrastructure Projects As Real Options Using Monte Carlo Simulation // Construction Management and Economics. 2006. V. 24. No. 5. P. 545–554.

114. Chiara N., Garvin M.J., Vecer J. Valuing Simple Multiple-Exercise Real Options in Infrastructure Projects // Journal of Infrastructure Systems. 2007. V. 13. No. 2. P. 97–104.

115. Chu U. A new approach to pricing real options on swaps: A new solution technique and extension to the non-a.s. finite stopping realm. Dissertation, Oregon State University. 2012.

116. Copeland T., Antikarov V. Real Options: A Practitioner's Guide. NY: Texere, 2001. 372 p.

117. Crocce F., Mordecki E. Explicit solutions in one-sided optimal stopping problems for one-dimensional diffusions // Stochastics. 2014. V. 86. Issue 3. P. 491–509.

118. Cummins J.G., Hassett K.A., Hubbard R.G. Tax reforms and investment: A cross-country comparison // Journal of Public Economics. 1996. V. 62. No. 1-2. P. 237–273.

119. Danielova A., Sarkar S. The effect of leverage on the tax-cut versus investment-subsidy argument // Review of Financial Economics. 2011. V. 20. No. 4. P. 123–129.

120. Dayanik S., Karatzas I. On the optimal stopping problem for one-dimensional diffusions // Stochastic Processes and Applications. 2003. V. 107. No 2. P. 173–212.

121. Dixit A.K., Pindyck R.S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994. 488 p.

122. Gale W.G. Economic Effects of Federal Credit Programs // American Economic Review. 1991. V. 81. No. 1. P. 133–152.

123. Gapeev P.V., Lerche H.R. On the structure of discounted optimal stopping problems for one-dimensional diffusions // Stochastics: International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2011. V. 83. No. 4-6. P. 537–554.

124. Garvin M.J., Cheah C.Y.J. Valuation Techniques for Infrastructure Investment Decisions // Construction Management and Economics. 2004. V. 22. No. 4. P. 373–383.

125. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks // Mathimatical Finance. 1996. V. 6. No. 3. P. 303–322.

126. Gil N. On the Value of Project Safeguards: Embedding Real Options in Complex Products and Systems // Research Policy. 2007. V. 36. No. 7. P. 980–999.

127. Gries T., Prior U., Sureth C. A Tax Paradox for Investment Decisions under Uncertainty // Journal of Public Economic Theory. 2012. V. 14. No. 3. P. 521–545.

128. Hassett K.A., Metcalf G.E. Investment with Uncertain Tax Policy: Does Random Tax Policy Discourage Investment? // Economic Journal. 1999. Vol. 109. P. 372–393.

129. Ho S.P., Liu L.Y. An Option Pricing-Based Model for Evaluating the Financial Viability of Privatized Infrastructure Projects // Construction Management and Economics. 2001. Vol. 20. No. 2. P. 143–156.

130. Hu Y., Oksendal B. Optimal Time to Invest When the Price Processes Are

Geometric Brownian Motions // Finance and Stochastics. 1998. V. 2. No. 3. P. 295–310.

131. Huang Y.-L., Chou S.-P. Valuation of the Minimum Revenue Guarantee and the Option to Abandon in BOT Infrastructure Projects // Construction Management and Economics. 2006. Vol. 24. No. 4. P. 379–389.
132. Ingersoll J.E., Ross S.A. Waiting to invest: Investment and uncertainty. // Journal of Business. 1992. V. 65. No. 1. P. l–29.
133. Jonsson H., Kukush A., Sylvestrov D. Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I. II // Theory Probability and Mathematical Statistics. 2005. V. 71. P. 93–103; V. 72. P. 42–53.
134. Jou J.-B. Irreversible Investment Decisions under Uncertainty with Tax Holidays // Public Finance Review. 2000. V. 28. No. 1. P. 66–81.
135. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, 1988. 470 p.
136. Krylov N.V. Introduction to the theory of diffusion processes. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994. 271 p.
137. Lai V.S. An analysis of private loan guarantees // Journal of Financial Services Research. 1992. No. 6. P. 267–280.
138. Lander D.M., Pinches G.E. Challenges to the Practical Implementation of Modeling and Valuing Real Options // The Quarterly Review of Economics and Finance. 1998. V. 38. No. 3. P. 537–567.
139. Lamberton D., Zervos M. On the optimal stopping of one-dimensional diffusion // Electronic Journal of Probability. 2013. V. 18. P. 1–49.
140. Li W. Entrepreneurship and Government Subsidies: A General Equilibrium Analysis // Journal of Economic Dynamics and Control. 2002. V. 26. No. 11. P. 1815–1844.
141. MacKie-Mason J.K. Some Nonlinear Tax Effects on Asset Values and Investment Decisions under Uncertainty // Journal of Public Economics. 1990. V. 42. No. 3. P. 301–327.
142. Mason S.P., Baldwin C. Evaluation of Government Subsidies to Large-Scale Energy Projects: A Contingent Claims Approach // Advances in Futures and Options Research. 1988. V. 3. P. 169–181.

143. McDonald R., Siegel D. The Value of Waiting to Invest // Quarterly Journal of Economics. 1986. V. 101. No. 4. P. 707–727.

144. Merton R.C. An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees: An application of modern option pricing theory // Journal of Banking and Finance. 1977. V. 1. No. 1. P. 3–11.

145. Mintz J.M. Corporate tax holidays and investment // The World Bank Economic Review. 1990. V. 4. No. 1. P. 81–102.

146. Niemann R. The Impact of Tax Uncertainty on Irreversible Investment // Review of Managerial Science. 2011. V. 5. No. 1. P. 1–17.

147. Niemann R., Sureth C. Sooner or Later? – Paradoxical Investment Effects of Capital Gains Taxation under Simultaneous Investment and Abandonment Flexibility // European Accounting Review. 2013. V. 22. No. 2. P. 367–390.

148. Pantouvakis J.P., Vandoros N. Using Real Options in Evaluating PPP/PFI Projects. Proceedings of the CIB W92 Conference. November. Salford, 2006. P. 594–603.

149. Pawlina G., Kort P.M. Investment under Uncertainty and Policy Change // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. V. 29. No. 7. P. 1193–1209.

150. Pedersen J.L. Optimal Stopping Problems for Time-Homogeneous Diffusions: A Review // In: Recent Advances in Applied Probabilities, R.Baeza-Yates, J. Glaz, H. Gzyl, J. Hüsler, J.L. Palacios (eds.). Springer, 2005. P. 427–454.

151. Pennings E. Taxes and stimuli of investment under uncertainty // European Economic Review. 2000. V. 44. No. 2. P. 383–391.

152. Pennings E. How to maximize domestic benefits from foreign investments: The effect of irreversibility and uncertainty // Journal of Economic Dynamics and Control. 2005. V. 29. P. 873–889.

153. Pereira P., Rodrigues A., Armada M. The Optimal Timing for the Construction of an Airport under Multiple Sources of Uncertainty. NEGE Working Paper 6/2007. Minho: University of Minho, 2007.

154. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Springer Verlag, 2006. 500 p.

155. Roemmich R., Duke G., Gates W. Maximizing the present value of tax savings from depreciation // Management Accounting. 1978. V. 56. P. 55–57.

156. Rose S. Valuation of Interacting Real Options in a Toll Road Infrastructure Project // The Quarterly Review of Economics and Finance. 1998. V. 38. Special Issue. P. 711–723.

157. Sansing R. Valuing the Deferred Tax Liability // Journal of Accounting Research. 1998. V. 36. No. 2. P. 357–363.

158. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. 1965. V. 6. No. 2. P. 13–31.

159. Schneider G., Sureth C. Capitalized Investments with Entry and Exit Options and Paradoxical Tax Effects // Review of Managerial Science. 2010. V. 4. No. 2. P. 149–169.

160. Smit H. Infrastructure Investment as a Real Options Game: The Case of European Airport Expansion // Financial Management. 2003. V. 32. No. 4. P. 27–57.

161. Sureth C. Partially Irreversible Investment Decisions and Taxation under Uncertainty: A Real Option Approach // German Economic Review. 2002. V. 3. No. 2. P. 185–221.

162. Takatsuka H. Existence conditions of the optimal stopping time: The cases of geometric Brownian motion and arithmetic Brownian motion // Journal of the Operations Research Society of Japan. 2004. V. 47. No. 3. P. 145–162.

163. Tax Incentives and Foreign Direct Investment. A Global Survey. ASIT Advisory Studies. No. 16. UNCTAD. N.Y., Geneva: United Nations, 2000. 177 p.

164. Tian Yu. Optimal policy for attracting FDI: Investment cost subsidy versus tax rate reduction // International Review of Economics and Finance. 2018. V. 53. P. 151–159.

165. Trigeorgis L. Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation. Cambridge: MIT Press, 1996. 406 p.

166. Trigeorgis L., Reuer J. J. Real options theory in strategic management // Strategic Management Journal. 2017. V. 38. P. 42-–63.

167. Trigeorgis L., Tsekrekos A. E. Real options in operations research: A review and synthesis // European Journal of Operational Research. 2018. V. 270. No. 1. P. 1–24.

168. Villeneuve S. On the threshold strategies and smooth-fit principle for optimal stopping problems // Journal of Applied Probability. 2007. V. 44. No. 1. P. 181–198.

169. Wakeman L. Optimal tax depreciation // Journal of Accounting and Economics. 1980. V. 2. No. 3. P. 213–237.

170. Wielhouwer J., Kort P., De Waegenaere A. Effects of tax depreciation on optimal firm investment / Discussion Paper No. 58. CentER, Tilburg University, 1999. 37 p.

171. Wielhouwer J., De Waegenaere A., Kort P. Optimal Tax Depreciation under a Progressive Tax System // Journal of Economic Dynamics and Control. 2002. V. 27. No. 2. P. 243–269.

172. Wong K.P. Progressive Taxation and the Intensity and Timing of Investment // Economic Modelling. 2011. V. 28. No. 1-2. P. 100–108.

173. Yu C.F., Chang T.C., Fan C.P. FDI timing: Entry cost subsidy versus tax rate reduction // Economic Modelling. 2007. V. 24. No. 2. P. 262–271.

174. Zmeškal Z. Generalized soft binomial American real option pricing model (fuzzy-stochastic approach) // European Journal of Operational Research. 2010. V. 207. No. 2. P. 1096–1103.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Оптимальная остановка двумерных случайных процессов

В этом разделе будет описан математический аппарат, используемый для исследования предложенной модели инвестиционных ожиданий. Речь будет идти о задаче оптимальной остановки двумерного случайного процесса, возникающей в базовой задаче (1.13) нахождения оптимального момента инвестирования.[33]

Начнем с более общей ситуации, касающейся оптимальной остановки для многомерных диффузионных процессов.

Пусть $\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^m),\ t \geq 0$ есть многомерный диффузионный процесс со значениями в R^m, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ):

$$d\xi_t^i = a_i(\xi_t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(\xi_t)dw_t^k, \quad (t \geq 0),\ i = 1, \dots, m, \quad \xi_0 = x, \tag{A.1}$$

где $a = (a_1, \dots, a_m),\ b_k = (b_{k1}, \dots, b_{km})$ — векторные функции на R^m, $(w_t^k,\ t \geq 0),\ k = 1, \dots, m$ – независимые винеровские процессы, x — заданное начальное состояние. Подробные условия существования процесса, удовлетворяющего системе (A.1) (в сильном или слабом смысле), приведены, например, в [135, Chapter 5].

Рассмотрим задачу оптимальной остановки для этого процесса вида

$$\mathbf{E}^x e^{-\rho\tau} g(\xi_\tau) \chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max_{\tau \in \mathcal{M}}, \tag{A.2}$$

где $g:\ R^m \to R^1$ — функция выплат, $\chi_{\{\tau<\infty\}}$ — "индикаторная" функция, равная 1 при конечном моменте τ и 0 в противном случае, $\mathbf{E}^x$ — математическое ожидание при условии, что рассматриваемый случайный процесс начинается в точке x, а максимум берется по некоторому классу $\mathcal{M}$ марковских моментов τ

---

[33] Результаты Приложения опубликованы в работах [10, 11, 22, 100, 104, 105] с соавторами.

(обычно рассматривается класс всех марковских моментов $\mathfrak{M}$)[34]. В дальнейшем, если не оговорено противное, говоря о задаче оптимальной остановки, мы будем иметь в виду задачу (A.2) по классу всех марковских моментов $\mathfrak{M}$.

Хотя общая теория оптимальной остановки развита достаточно хорошо (см., например, [71, 89, 154]), конкретных решенных (в явном виде) задач крайне мало, особенно для многомерного случая. Довольно подробный обзор существующих методов и результатов для многомерных диффузионных процессов можно найти, например, в [150].

Традиционным подходом к решению задачи (A.2) является эвристический метод "гладкого склеивания" для краевых задач со свободной границей.

Пусть $\mathcal{L}$ есть производящий оператор процесса (A.1), определенный на функциях из $C^2(R^m)$, заданный формулой

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) f'_{x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x) b_{kj}(x) f''_{x_i x_j}(x). \tag{A.3}$$

Чтобы не рассматривать вырожденные (детерминированные) процессы, будем считать, что $\mathcal{L}$ является эллиптическим оператором, т.е. собственные значения матрицы диффузии $\| \sum_{k=1}^{m} b_{ki}(x) b_{kj}(x) \|_{i,j=1,\dots,m}$ положительны при всех $x \neq 0$.

Пусть $F(x)$ есть оптимальное значение функции выигрыша в задаче (A.2), а $\mathcal{C} = \{x \in R^m : \; g(x) < F(x)\}$ — область "продолжения наблюдений". Тогда $F(x)$ как функция от начального значения процесса $\xi_0 = x$, удовлетворяет дифференциальному уравнению внутри этой области

$$\mathcal{L}F(x) = \rho x, \quad x \in \mathcal{C}$$

и "непрерывному склеиванию" на ее границе

$$F(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{C}.$$

Специфика задачи состоит в том, что сама область $\mathcal{C}$ неизвестна и является предметом поиска. Для ее нахождения используют ряд дополнительных условий, связанных с равенством на границе области $\partial\mathcal{C}$ производных функций

---

[34] Мы допускаем, что марковские моменты могут принимать значения $+\infty$. В литературе марковские моменты, принимающие только конечные значения, иногда называют моментами остановки (см., например, [154]). Здесь мы не будем делать различия между марковскими моментами и моментами остановки.

$F(x)$ и $g(x)$ — "гладкое склеивание". Иногда рассматриваются односторонние производные или производные по направлению. Различные варианты "гладкого склеивания" есть, например, в [71, 154]. Такого рода граничные задачи для дифференциальных уравнений с неизвестной границей иногда называют также задачами Стефана (см., например, [89]).

Метод "гладкого склеивания" рассматривается для задач оптимальной остановки как чисто эвристический прием нахождения решения, оптимальность которого нуждается в дополнительном обосновании. Заметим, в частности, что метод гладкого склеивания может в некоторых случаях наряду с решением задачи на максимум может вообще не давать решения исходной задачи оптимальной остановки — соответствующие примеры приведены, в частности, в [10].

A.1. Вариационный подход к исследованию задач оптимальной остановки

В [10] был предложен другой подход к решению задачи оптимальной остановки (A.2), отличающийся от описанного выше метода гладкого склеивания.

Излагаемый ниже подход основан на рассмотрении в задаче (A.2) класса марковских моментов $\mathcal{M}$, являющихся моментами первого выхода процесса ξ_t из множеств заданного семейства областей (открытых множеств) $\mathcal{G} = \{G \subset R^m\}$, и дальнейшей оптимизации (варьировании) в этом классе областей.

Для обоснования "разумности" такого подхода заметим, что при довольно слабых предположениях (типа полунепрерывности снизу функции выплат) момент оптимальной остановки можно представить, как момент первого выхода диффузионного процесса из области "продолжения наблюдений" $\mathcal{C}$ (см., например, [71, 154]). Поэтому в качестве класса областей можно было бы взять, например, все открытые множества (в R^m). Однако, в многомерном случае структура открытых множеств достаточно сложна, в отличие от одномерной ситуации, где открытое множество представляет собой не более чем счетное объединение непересекающихся интервалов. Отсюда, в частности, следует, что для одномерных процессов ξ_t оптимальный момент остановки можно искать среди моментов первого выхода ξ_t из интервалов (a,b), содержащих начальное значение процесса ξ_0. В рамках такого подхода необходимые условия оптимальности соответствующего интервала получил L. Alvarez в [95], однако этот метод существенно опирается на ряд свойств одномерного диффузионного процесса, не имеющих места в многомерном случае. Достаточные условия оптимальности момента первого выхода из интервала имеются, например, в [123]. Что касается многомерных процессов, то для задачи оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения и однородной (первой степени) функции выплат условия первого порядка как эвристический способ нахождения границ оптимального "сектора продолжения наблюдений" были сформулированы в работе [125].

Перейдем к формальному описанию вариационного подхода.

Пусть $\mathcal{G}$ есть заданное семейство областей в пространстве R^m и $G \in \mathcal{G}$.

Обозначим $\tau_G = \tau_G(x) = \min\{t \geq 0 : \ \xi_t \notin G\}$ – момент первого выхода из области G процесса ξ_t, описываемого уравнениями (A.1) и начальным значением $\xi_0 = x$. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \{\tau_G, \ G \in \mathcal{G}\}$ – множество моментов первого выхода для класса областей $\mathcal{G}$.

Известно, при некоторых предположениях функция (от начального значения процесса x)

$$V(G;x) = \mathbf{E}^x e^{-\rho\tau_G} g(\xi_{\tau_G})\chi_{\{\tau_G<\infty\}} \tag{A.4}$$

является решением граничной задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u(x) = \rho u(x), \qquad x \in G, \tag{A.5}$$

$$u(x) \to g(a), \qquad x \in G, \ x \to a, \ a \in \partial G. \tag{A.6}$$

Варианты этого утверждения (при различных предположениях) можно найти, например, в [71, 135, 136].

При фиксированном начальном значении процесса x каждой области $G \in \mathcal{G}$ можно поставить в соответствие решение $U_G(x)$ задачи (A.5)–(A.6) как функцию на множестве областей $\mathcal{G}$. Для вычисления таких функций множества наряду с дифференциальными уравнениями могут также использоваться и другие методы, в частности, мартингальные (см., например, [91, 125, 154]).

Таким образом, решение задачи оптимальной остановки (A.2) в классе $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ можно свести к решению "вариационной задачи"

$$V(G;x) \to \max_{G \in \mathcal{G}}. \tag{A.7}$$

А именно, если G^* есть оптимальная область в (A.7), то оптимальный момент остановки в классе $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ есть момент первого выхода процесса из этой области: $\tau^*(\mathcal{G}) = \tau_{G^*}$.

Если из каких-то соображений (возможно, эвристических) класс областей $\mathcal{G}$ выбран "удачно", то удается доказать, что момент $\tau^*(\mathcal{G})$ будет и оптимальным моментом остановки в задаче (A.2) по всем марковским моментам $\mathfrak{M}$.

Отметим, что вычисление оптимального момента остановки в заданном классе областей представляет и вполне самостоятельный интерес. Дело в том, что для многомерных диффузионных процессов оптимальная область продолжения наблюдений может иметь очень сложную структуру, поэтому имеет смысл ограничиться более простыми областями, а решение задач (A.5)–(A.6) и (A.7) при этом искать численными методами. Особенно это относится к ситуации, когда решение задачи оптимальной остановки не является конечной целью исследования, а лишь его промежуточным этапом (например, как в рассмотренных выше моделях стимулирования инвестиций).

В следующем разделе такой подход будет реализован для двумерного геометрического броуновского движения ξ_t и однородной (произвольной степени) функции выплат g.

Некоторые общие результаты, касающиеся условий оптимальности при вариационном подходе для произвольных диффузионных процессов и "однопараметрического" семейства областей, будут приведены в разделе A.4.

A.2. Двумерное геометрическое броуновское движение

Рассмотрим двумерный диффузионный процесс $\xi_t = (\xi_t^1, \xi_t^2),\ t \geq 0$:

$$\begin{aligned} d\xi_t^1 &= \xi_t^1(\alpha_1 dt + \sigma_1 d\tilde{w}_t^1), \quad \xi_0^1 = x_1, \\ d\xi_t^2 &= \xi_t^2(\alpha_2 dt + \sigma_2 d\tilde{w}_t^2), \quad \xi_0^2 = x_2, \end{aligned} \tag{A.8}$$

где винеровские процессы $\tilde{w}_t^1$ и $\tilde{w}_t^2$ коррелированы между собой:

$$\mathbf{E}\tilde{w}_t^1\tilde{w}_t^2 = rt, \quad |r| < 1.$$

Для того, чтобы привести этот процесс к каноническому виду (A.1), введем новые винеровские процессы

$$w_t^1 = \tilde{w}_t^1, \qquad w_t^2 = (\tilde{w}_t^2 - r\tilde{w}_t^1)/\sqrt{1-r^2}.$$

Нетрудно видеть, что процессы w_t^1 и w_t^2 будут некоррелированными ($\mathbf{E}w_t^1w_t^2 = 0$) и, следовательно, независимыми. Поэтому, процесс ξ_t представим в виде:

$$\begin{aligned} d\xi_t^1 &= \xi_t^1(\alpha_1 dt + \sigma_1 dw_t^1), \\ d\xi_t^2 &= \xi_t^2[\alpha_2 dt + \sigma_2(r dw_t^1 + \sqrt{1-r^2}dw_t^2)], \end{aligned} \tag{A.9}$$

где w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы.

В качестве семейства областей будем рассматривать однопараметрическое семейство $\mathcal{G}_0$ множеств вида

$$G_p = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : \ x_2 < px_1\}, \quad p > 0, \tag{A.10}$$

где $R_+^2 = \{(x_1, x_2) : \ x_1, x_2 > 0\}$.

Для процесса $\xi = (\xi_t^1, \xi_t^2)$, описываемого системой уравнений (A.8) с начальным значением $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$, обозначим $\tau_p(x) = \min\{t \geq 0 : \ \xi_t \notin G_p\} = \min\{t \ \geq \ 0 \ : \ \xi_t^2 \ \geq \ p\xi_t^1\}$ — момент первого выхода процесса из области G_p (иногда, ради краткости, мы будем опускать x, т.е. писать просто τ), а $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\mathcal{G}_0) = \{\tau_p(x) : \ p > 0, \, x \in R_+^2\}$.

Пусть

$$F_p(x) = \mathbf{E}^x e^{-\rho\tau_p(x)} g(\xi_{\tau_p(x)}), \quad x \in R_+^2 \tag{A.11}$$

(верхний индекс x у знака математического ожидания подчеркивает, что процесс ξ_t начинается из точки x).

Заметим, что если $x \notin G_p$, то $\tau_p(x) = 0$ и, значит, $F_p(x) = g(x)$.

Напомним, что функция $g : \ R_+^2 \to R^1$ называется однородной степени q, если

$$g(\lambda x) = \lambda^q g(x) \quad \text{для всех } \ x \in R_+^2 \text{ и } \ \lambda > 0.$$

Будем далее считать, что функция $g(x)$ ограничена на положительном симплексе $\Sigma_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1,\ x_1, x_2 > 0\}$, т.е.

$$\sup_{(x_1,x_2)\in\Sigma_+} |g(x_1, x_2)| < \infty. \tag{A.12}$$

Будем обозначать $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2 - 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$ ("полная" волатильность процесса (A.8)) и считать, что $\tilde{\sigma} > 0$.

Теорема A.1. *Пусть функция $g(x)$ является однородной степени $q \geq 0$. Обозначим $\bar{\alpha}_i = \alpha_i + \frac{1}{2}(q-1)\sigma_i^2 \quad (i = 1, 2)$ и предположим, что выполнены условия:*

$$\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 \geq \alpha_1 - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2, \tag{A.13}$$

$$\rho > \max(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)q. \tag{A.14}$$

Тогда имеет место следующая формула:

$$F_p(x_1, x_2) = \begin{cases} g(1,p)p^{-\beta}x_1^{q-\beta}x_2^{\beta}, & \text{\textit{при} } 0 < x_2 < px_1, \\ g(x_1, x_2), & \text{\textit{при} } x_2 \geq px_1 > 0, \end{cases} \tag{A.15}$$

где β — положительный корень квадратного уравнения

$$\tfrac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\beta(\beta-1) + \left(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 - \tfrac{1}{2}(q-1)\tilde{\sigma}^2\right)\beta - (\rho - \bar{\alpha}_1 q) = 0. \tag{A.16}$$

Заметим, что если $q = 1$ и выполнено условие (A.14), то $\beta > 1$.

Вариационная задача (A.7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$F_p(x) \to \max_{p>0}. \tag{A.17}$$

Явный вид функции $F_p(x)$ позволяет найти решение этой задачи и, тем самым, решить задачу оптимальной остановки (A.2) в определенном выше классе марковских моментов $\mathcal{M}_0$.

Далее будем обозначать $\tilde{g}(p) = g(1, p)$, $h(p) = \tilde{g}(p)p^{-\beta} \quad (0 < p < \infty)$.

Теорема A.2. *Пусть выполнены условия Теоремы A.1. Для того, чтобы марковский момент $\tau_{p^*}(x)$ был оптимальным в задаче (A.2) по классу марковских моментов $\mathcal{M}_0$ (для всех $x \in R_+^2$), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

$$h(p) \leq h(p^*) \quad \textit{при} \;\; p < p^*, \tag{A.18}$$

$$h(p) \;\textit{не возрастает при}\;\; p > p^*. \tag{A.19}$$

При этом оптимальным значением выигрыша в (А.2) по классу $\mathcal{M}_0$ *будет*

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{cases} h(p^*)x_1^{q-\beta}x_2^{\beta}, & \text{при } 0 < x_2 < p^*x_1, \\ g(x_1, x_2), & \text{при } x_2 \geq p^*x_1 > 0. \end{cases} \tag{A.20}$$

Таким образом, параметр p^* множества, определяющий оптимальный момент остановки для задачи (А.2) в классе марковских моментов $\mathcal{M}_0$, должен быть точкой максимума функции $h(p)$.

При некоторых дополнительных условиях этот момент остановки будет оптимальным моментом остановки и в классе всех марковских моментов $\mathfrak{M}$.

Теорема А.3. *Пусть выполнены условия Теоремы А.1,* p^* *есть точка единственного максимума функции* $h(p)$, $h'(p^*{+}0) = 0$, $g(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема в области* $\{(x_1, x_2) : \; x_2 \geq p^*x_1 > 0\}$, *кроме того, при всех* $p > p^*$:

$$\tilde{g}'(p)p^{-\beta+1} \quad \textit{не возрастает.} \tag{A.21}$$

Тогда $\tau^* = \min\{t \geq 0 : \;\; \xi_t^2 \geq p^*\xi_t^1\}$ *является оптимальным моментом остановки в задаче (А.2) по всем марковским моментам* $\mathfrak{M}$ *(для всех* $x \in R_+^2$*), а соответствующим оптимальным значением выигрыша в (А.2) будет функция (А.20).*

Задачу оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения и линейно однородной функцией выплат (т.е. $q = 1$) рассматривал также H. Takatsuka [162], предложенные им достаточные условия оптимальности имеют несколько иной вид, чем сформулированные в теореме А.3.

Приведем следствие этой общей теоремы для линейной функции выплат $g(x_1, x_2) = c_2x_2 - c_1x_1$, где $c_1, c_2 > 0$. Именно этот случай и возникает в задаче выбора оптимального момента инвестирования.

Следствие A.1. *Пусть* $g(x_1, x_2) = c_2 x_2 - c_1 x_1$, *где* $c_1, c_2 > 0$, *выполнено условие (A.13) и* $\rho > \max(\alpha_1, \alpha_2)$. *Тогда оптимальным моментом остановки для задачи (A.2) по всем марковским моментам* $\mathfrak{M}$ *является* $\tau^* = \min\{t \geq 0 : \xi_t^2 \geq p^* \xi_t^1\}$, *где* $p^* = \dfrac{\beta}{\beta - 1} \cdot \dfrac{c_1}{c_2}$, *а* β *есть положительный корень квадратного уравнения*

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \beta(\beta - 1) + (\alpha_2 - \alpha_1)\beta - (\rho - \alpha_1) = 0.$$

Формула для оптимального момента остановки в случае разности двух геометрических броуновских движений была впервые приведена (из эвристических соображений), по-видимому, в [143]. Строгое доказательство оптимальности, а также условия, при которых эта формула справедлива, появились гораздо позже ([130]). Отметим, что условие (A.13) гарантирует конечность (п.н.) оптимального момента остановки (см. Лемму A.1 ниже). Расширение этого условия, при котором τ^* может принимать значение $+\infty$ с положительной вероятностью, исследовалось в [115].

Если функция $\tilde{g}(p)$ дифференцируема в точке $p^* > 0$, то необходимое условие оптимальности в задаче (A.17)

$$h'(p^*) = 0, \quad \text{или} \ \ p^* \tilde{g}'(p^*) = \beta \tilde{g}(p^*)$$

совпадает с условием "гладкого склеивания" для оптимального значения функции выигрыша (A.20) по классу $\mathcal{M}_0$:

$$\Phi'_{x_2}(x_1, p^* x_1 - 0) = g'_{x_2}(x_1, p^* x_1).$$

Таким образом, для двумерного геометрического броуновского движения и однородной функции выплат условия "гладкого склеивания" вытекают из Теоремы A.2.

A.3. Доказательства теорем

Доказательство Теоремы A.1. Нам понадобится следующая

Лемма A.1. *Если выполнено условие (A.13), то* $\tau_p(x) < \infty$ *(п.н.) для любых* $x \in R_+^2$ *и* $p > 0$.

Доказательство леммы. Из явных представлений для одномерных геометрических броуновских движений в (A.8) имеем:

$$\frac{\xi_t^2}{\xi_t^1} = \frac{x_2}{x_1} \exp\{(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)t + \sigma_2 \tilde{w}_t^2 - \sigma_1 \tilde{w}_t^1\} = \frac{x_2}{x_1} \exp\{(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)t + \tilde{\sigma}\hat{w}_t\}, \qquad (A.22)$$

где $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \quad (i = 1, 2)$, а $\hat{w}_t$ является винеровским процессом.

Поскольку $\tau_p(x) = \min\{t \geq 0 : \xi_t^2 \geq p\xi_t^1\}$ совпадает с моментом первого достижения процессом ξ_t^2/ξ_t^1 уровня p, то из (A.22) вытекает, что при $\tilde{\alpha}_2 \geq \tilde{\alpha}_1$ $\tau_p(x)$ будет конечен п.н. при всех $x \in R_+^2$ и $p > 0$, т.к. винеровский процесс достигает любых значений с вероятностью единица. ☐

Вернемся к доказательству Теоремы A.1. Покажем, прежде всего, что $F_p(x)$ будет однородной степени q функцией от x.

Заметим, что, поскольку $\tau_p(x)$ является моментом первого выхода процесса ξ_t^2/ξ_t^1 за уровень p, то из формулы (A.22) вытекает, что $\tau_p(x)$ однородна нулевой степени по $x = (x_1, x_2)$.

Далее, из линейной однородности процесса ξ_t по начальному значению и однородности функции $g(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} F_p(\lambda x) &= \mathbf{E}^{\lambda x} e^{-\rho\tau_p(\lambda x)} g(\xi_{\tau_p(\lambda x)}) = \mathbf{E}^{\lambda x} e^{-\rho\tau_p(x)} g(\xi_{\tau_p(x)}) \\ &= \mathbf{E}^{x} e^{-\rho\tau_p(x)} g(\lambda\xi_{\tau_p(x)}) = \lambda^q F_p(x), \end{aligned}$$

т.е. функция $F_p(x)$ однородна степени q.

Будем искать $F_p(x)$ как решение задачи Дирихле (A.3)–(A.4). В силу свойства однородности функцию $F_p(x)$ можно представить в виде

$$F_p(x_1, x_2) = x_1^q f(y), \quad \text{где} \;\; y = \frac{x_2}{x_1}, \quad f(y) = F_p(1, y).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} y'_{x_1} &= -\frac{y}{x_1}, \quad y'_{x_2} = -\frac{1}{x_1}, \\ F'_{x_1} &= q x_1^{q-1} f(y) + x_1^q f'(y) \left(-\frac{y}{x_1}\right) = x_1^{q-1}[q f(y) - y f'(y)], \\ F'_{x_2} &= x_1^{q-1} f'(y), \\ F''_{x_2 x_2} &= x_1^{q-2} f''(y), \end{aligned}$$

$$F''_{x_1x_2} = (q-1)x_1^{q-2}f'(y) + x_1^{q-1}f''(y)\left(-\frac{y}{x_1}\right) = x_1^{q-2}[(q-1)f'(y) - yf''(y)],$$

$$F''_{x_1x_1} = (q-1)x_1^{q-2}[qf(y) - yf'(y)] + x_1^{q-1}\Bigg[qf'(y)\left(-\frac{y}{x_1}\right) + \frac{y}{x_1}f'(y)$$

$$- yf''(y)\left(-\frac{y}{x_1}\right)\Bigg] = x_1^{q-2}\left\{(q-1)[qf(y) - yf'(y)]\right.$$

$$\left. - y[(q-1)f'(y) - yf''(y)]\right\} = x_1^{q-2}\{(q-1)[qf(y) - 2yf'(y)] + y^2f''(y)\}.$$

Из представления (A.9) следует, что производящий оператор процесса ξ_t имеет вид:

$$\mathcal{L}F(x) = \alpha_1x_1F'_{x_1} + \alpha_2x_2F'_{x_2} + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2x_1^2F''_{x_1x_1} + r\sigma_1\sigma_2x_1x_2F''_{x_1x_2} + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2x_2^2F''_{x_2x_2}. \quad \text{(A.23)}$$

Уравнение (A.5) и формула (A.23) для эллиптического оператора $\mathcal{L}$ приводят к следующему соотношению

$$\rho f(y) = \alpha_1[qf(y) - yf'(y)] + \alpha_2yf'(y) + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2\left\{(q-1)[qf(y) - 2yf'(y)] + y^2f''(y)\right\}$$

$$+ r\sigma_1\sigma_2y[(q-1)f'(y) - yf''(y)] + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2y^2f''(y),$$

или

$$\tfrac{1}{2}y^2f''(y)\tilde{\sigma}^2 + yf'(y)[\bar{\alpha_2} - \bar{\alpha_1} - \tfrac{1}{2}\tilde{\sigma}^2] - f(y)(\rho - \bar{\alpha_1}q) = 0. \quad \text{(A.24)}$$

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (A.24) ищется в виде $f(y) = Cy^\beta$, где C — некоторая постоянная. При этом β должно быть корнем квадратного уравнения (A.16).

Если выполнено (A.14), то уравнение (A.16) имеет два корня: положительный β_1 и отрицательный β_2. Таким образом, любое решение уравнения (A.24) при $0 < y < p$ имеет вид:

$$f(y) = C_1y^{\beta_1} + C_2y^{\beta_2}, \quad \text{где } \beta_1 > 0,\ \beta_2 < 0,$$

или, возвращаясь к исходной функции,

$$F_p(x_1, x_2) = C_1x_1^{q-\beta_1}x_2^{\beta_1} + C_2x_1^{q-\beta_2}x_2^{\beta_2}, \quad \text{при } 0 < x_2 \le px_1,\ x_1 > 0 \quad \text{(A.25)}$$

Нетрудно показать, что при всех $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$ $|g(x_1, x_2)| \le C(x_1^q + x_2^q)$, где $C = 2^q \sup\limits_{0<y<1} |g(y, 1-y)|$. Отсюда,

$$|F_p(x_1, x_2)| \le C \max_\tau \mathbf{E}^x[(\xi_\tau^1)^q + (\xi_\tau^2)^q]e^{-\rho\tau},$$

где max берется по всем марковским моментам τ.

Из формулы Ито несложно показать, что процесс $(\xi_t^1)^q$ является геометрическим броуновским движением с начальным состоянием x_1^q, темпом роста $\bar{\alpha}_1 q$ и волатильностью $\sigma_1 q$. Поэтому, из условия (A.14) вытекает, что для любого марковского момента τ

$$\mathbf{E}^x (\xi_\tau^1)^q e^{-\rho\tau} = x_1^q \mathbf{E} \exp\{-(\rho - \bar{\alpha}_1 q)\tau\} \leq x_1^q.$$

Аналогично, $\mathbf{E}^x (\xi_\tau^2)^q e^{-\rho\tau} \leq x_2^q$. Следовательно, $|F_p(x_1, x_2)|$ ограничено сверху функцией $C(x_1^q + x_2^q)$.

Теперь, из полученной ограниченности следует, что в представлении (A.25) $C_2 = 0$. Постоянная C_1 находится из граничного условия на прямой $\{x_2 = px_1\}$, а именно,

$$F_p(x_1, px_1) = C_1 x_1^q p^{\beta_1} = g(x_1, px_1) = x_1^q g(1, p),$$

т.е. $C_1 = g(1, p)p^{-\beta}$. $\square$

Доказательство Теоремы A.2.

1) Пусть выполнены условия (A.18)–(A.19). Возьмем произвольное $x = (x_1, x_2) \in R_+^2$ и покажем, что $F_p(x) \leq F_{p^*}(x)$ при всех $p > 0$.

Имеем

$$g(x) = x_1^q g\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\beta \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\beta} = h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^{q-\beta} x_2^\beta \leq h(p^*) x_1^{q-\beta} x_2^\beta.$$

Пусть $p \leq p^*$. Тогда из Теоремы A.1 получаем:

$F_p(x) = g(x) = F_{p^*}(x)$ при $x_2 \geq p^* x_1$;

$F_p(x) = g(x) \leq h(p^*) x_1^{q-\beta} x_2^\beta = F_{p^*}(x)$ при $px_1 \leq x_2 < p^* x_1$;

$F_p(x) = h(p) x_1^{q-\beta} x_2^\beta \leq h(p^*) x_1^{q-\beta} x_2^\beta = F_{p^*}(x)$ при $x_2 < px_1$.

Аналогичными рассмотрениями показывается неравенство $F_p(x) \leq F_{p^*}(x)$ для всех $x \in R_+^2$ и $p > p^*$.

2) Пусть теперь $F_p(x) \leq F_{p^*}(x)$ для всех $x \in R_+^2$ и $p > 0$. Отсюда и формулы (A.15) следует: при $p < p^*$ и $0 < x_2 < px_1$

$$F_p(x) = h(p) x_1^{q-\beta} x_2^\beta \leq F_{p^*}(x) = h(p^*) x_1^{q-\beta} x_2^\beta,$$

откуда $h(p) \leq h(p^*)$, а при $p^* < p_1 < p_2$

$$F_{p_2}(x_1, p_1x_1) = h(p_2)x_1^{q-\beta}(p_1x_1)^\beta \leq F_{p^*}(x_1, p_1x_1) = g(x_1, p_1x_1) = x_1^q h(p_1)p_1^\beta,$$

откуда $h(p_2) \leq h(p_1)$. □

Доказательство Теоремы А.3. Для доказательства оптимальности момента остановки τ^* по всем марковским моментам мы будем использовать "верификационную теорему", основанную на методе вариационных неравенств (см. [71, 130]). Приведем ее в необходимом для нас виде.

Будем обозначать P^x — распределение процесса ξ_t (в пространстве траекторий) с начальной точкой $\xi_0 = x$, $\mathbf{E}^x$ — математическое ожидание по распределению P^x.

Верификационная теорема ([71]). *Предположим, что существует функция $\Phi: \ R_+^m \to R^1$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\Phi \in C^1(R_+^m), \quad \Phi \in C^2(R_+^m \setminus \partial D)$;

здесь и далее $D = \{x \in R_+^m : \ \Phi(x) > g(x)\}$, а ∂D – граница множества D,

2) ∂D является графиком локально липшицевой функции и $\mathbf{E}^x \int_0^\infty \chi_{\partial D}(\xi_t)\, dt = 0$ для всех $x \in R_+^m$;

3) $\Phi(x) \geq g(x)$ для всех $x \in R_+^m$;

4) $L\Phi = \rho\Phi$ для $x \in D$;

5) $L\Phi \leq \rho\Phi$ для $x \in R_+^m \setminus \overline{D}$ ($\overline{D}$ — замыкание множества D);

6) $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \ \xi_t \notin D\} < \infty$ п.н. (по мере P^x) для всех $x \in R_+^m$;

7) семейство $\{\Phi(\xi_\tau)e^{-\rho\tau}, \ \tau \leq \tau_D\}$ равномерно интегрируемо (по мере P^x) для всех $x \in D$.

Тогда $\tau^* = \tau_D$ является оптимальным моментом остановки в задаче (A.2) по всем марковским моментам, а $\Phi(x)$ — соответствующим оптимальным значением функционала.

Для применения этой теоремы рассмотрим функцию $\Phi(x_1, x_2)$, определенную в (A.20) и проверим, что для нее выполнены все условия верификационной теоремы.

Требуемые в условии 1) свойства гладкости функции Φ следуют из ее определения, гладкости функции g и условия первого порядка для максимума функции $h(p)$: $h'(p^*{+}0) = 0$.

Условие 2) верификационной теоремы вытекает из свойств геометрического броуновского движения, а условие 4) непосредственно из построения функции $\Phi(x) = F(p^*, x)$ как решения задачи Дирихле.

Поскольку $h(p^*) > h(p)$ для всех $p \neq p^*$, то при $x_2 < p^* x_1$ имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2) &= h(p^*) x_1^{q-\beta} x_2^{\beta} > h(x_2/x_1) x_1^q \, (x_2/x_1)^{\beta} \\ &= x_1^q g(1, x_2/x_1) \, (x_2/x_1)^{-\beta} \, (x_2/x_1)^{\beta} = g(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(x) \geq g(x)$ для всех $x \in R^2_+$, т.е. выполнено условие 3), причем область $D = \{x \in R^2_+ : \ \Phi(x) > g(x)\}$ совпадает с множеством $\{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < p^* x_1\}$.

Далее $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \ \xi_t \notin D\} = \inf\{t \geq 0 : \ \xi^2_t \geq p^* \xi^1_t\} < \infty$ п.н. для всех $x \in R^2_+$ в силу Леммы А.1, тем самым условие 6) выполнено.

Покажем, что из (А.14) вытекает выполнение условия 7) верификационной теоремы. В самом деле, если $\tau \leq \tau_D$, то $\xi^2_\tau \leq p^* \xi^1_\tau$ и, значит,

$$\Phi(\xi_\tau) e^{-\rho\tau} = h(p^*)(\xi^1_\tau)^q \left(\frac{\xi^2_\tau}{\xi^1_\tau}\right)^{\beta} e^{-\rho\tau} \leq h(p^*)(p^*)^{\beta}(\xi^1_\tau)^q e^{-\rho\tau} = \tilde{g}(p^*)(\xi^1_\tau)^q e^{-\rho\tau}.$$

Поскольку $(\xi^1_t)^q$ является геометрическим броуновским движением с начальным состоянием x_1^q, темпом роста $\bar{\alpha}_1 q$ и волатильностью $\sigma_1 q$, то из явного представления для геометрического броуновского движения имеем: при $k > 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^x[\Phi(\xi_\tau)e^{-\rho\tau}]^k &\leq \tilde{g}^k(p^*) x_1^{qk} \mathbf{E}^x \exp\{[-\rho\tau + (q\bar{\alpha}_1 - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 q^2)\tau + q\sigma_1 w^1_\tau] k\} \\ &= \tilde{g}^k(p^*) x_1^{qk} \mathbf{E}^x \exp\{-k[\rho - \bar{\alpha}_1 q - \tfrac{1}{2} q^2 \sigma_1^2 (k-1)]\tau + q\sigma_1 k w^1_\tau - \tfrac{1}{2} q^2 \sigma_1^2 k^2 \tau\} \\ &\leq \tilde{g}^k(p^*) x_1^{qk} \mathbf{E}^x \exp\{q\sigma_1 w^1_\tau - \tfrac{1}{2} q^2 \sigma_1^2 \tau\}\end{aligned}$$

в силу условия (А.14) при k достаточно близком к 1. Поскольку $M_t = \exp\{q\sigma_1 w^1_t - \frac{1}{2} q^2 \sigma_1^2 t\}$ образует мартингал (см., например, [135]), то $\mathbf{E} M_\tau = \mathbf{E} M_0 = 1$. Поэтому при некотором $k > 1$

$$\sup_{\tau \leq \tau_D} \mathbf{E}^x \left[\Phi(\xi_\tau) e^{-\rho\tau}\right]^k \leq \tilde{g}^k(p^*) x_1^{qk},$$

откуда и вытекает равномерная интегрируемость.

Пусть теперь $x_2 \geq p^* x_1$, т.е. $p = x_2/x_1 \geq p^*$ и, значит, $\Phi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = x_1^q \tilde{g}(p)$. Повторяя выкладки, аналогичные проведенным выше при выводе соотношения (A.24), имеем

$$Lg(x) - \rho g(x) = x_1^q \left[\tfrac{1}{2} p^2 \tilde{g}''(p) \tilde{\sigma}^2 + p\tilde{g}'(p)(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 - \frac{q-1}{2}\tilde{\sigma}^2) - \tilde{g}(p)(\rho - \bar{\alpha}_1 q) \right].$$

Условие (A.21) равносильно неравенству

$$p\tilde{g}''(p) \leq (\beta - 1)\tilde{g}'(p) \quad \text{при } p > p^*. \tag{A.26}$$

Интегрируя обе части (A.26) от p^* до p нетрудно получить, что для $p > p^*$

$$p\tilde{g}'(p) \leq p^* \tilde{g}'(p^*) + \beta[\tilde{g}(p) - \tilde{g}(p^*)] = \beta\tilde{g}(p), \tag{A.27}$$

поскольку $h'(p^*) = 0$. Используя неравенства (A.26), (A.27) и тот факт, что β_1 есть положительный корень уравнения (A.16), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Lg(x) - \rho g(x)}{x_1^q} &\leq \tfrac{1}{2} p^2 \tilde{g}''(p)\tilde{\sigma}^2 + p\tilde{g}'(p)\left[\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 - \frac{q-1}{2}\tilde{\sigma}^2 - \frac{1}{\beta}(\rho - \bar{\alpha}_1 q)\right] \\ &= \tfrac{1}{2} p\tilde{\sigma}^2 [p\tilde{g}''(p) - (\beta - 1)\tilde{g}'(p)] \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому, условие 5) верификационной теоремы также выполнено.

Таким образом, выполняются все условия верификационной теоремы и, значит, $\tau_D = \tau^*$ является оптимальным моментом остановки в (A.2) по классу всех марковских моментов $\mathfrak{M}$. ☐

Следствие A.1 очевидным образом вытекает из Теоремы A.3.

A.4. Вариационный подход для однопараметрического семейства областей

Вернемся к вариационному подходу, изложенному в разделе A.1, и покажем, что при некоторых дополнительных предположениях общую вариационную задачу (A.7) можно сделать более удобной для исследования.

В этом разделе будет рассматриваться семейство областей в R^m, полностью определяемых одномерным параметром: $\mathcal{G} = \{G_p,\ p \in P \subset R^1\}$ — однопараметрическое семейство областей в R^m.

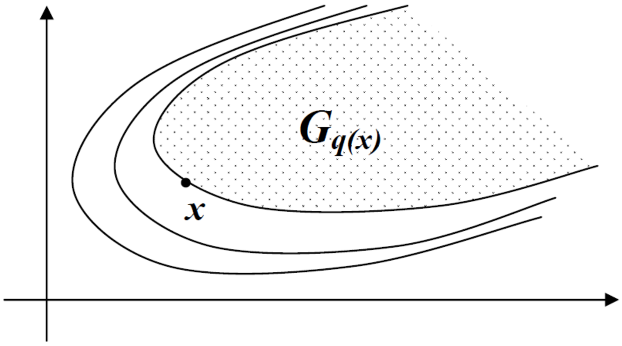


Рисунок А.1. "Густота" семейства множеств

Для произвольного диффузионного процесса ξ_t, $t \geq 0$, определенного в (А.1) и принимающего значения в множестве $D \subset R^m$, будем обозначать $\tau_p = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \notin G_p\}$,

$$V(p;x) = \mathbf{E}^x e^{-\rho\tau_p} g(\xi_{\tau_p})\chi_{\{\tau_p<\infty\}}$$

(сравни с формулой (А.4)).

Функция $V(p;x)$ определена на произведении множеств $P \times D$, и, очевидно, $V(p;x) = g(x)$ при $x \notin G_p$.

Далее будем предполагать, что семейство областей G_p удовлетворяет следующим условиям:

(A1) *Монотонность*: $G_{p_1} \subset G_{p_2}$ при $p_1 < p_2$.

(A2) *"Густота"*: через каждую точку $x \in D$ проходит граница единственного множества из класса $\mathcal{G}$ (параметр этого множества будем обозначать через $q(x)$, так что $x \in \partial G_{q(x)}$) — см. Рисунок А.1.

В условиях свойства "густоты" можно записать соотношение:

$$V(q(x);x) = g(x) \quad \forall x \in D. \tag{A.28}$$

При выполнении условий **(A1)** и **(A2)** множества G_p можно характеризовать "граничной функцией" $q(x)$, а именно, $G_p = \{x \in D : q(x) < p\}$.

Для рассматриваемого случая однопараметрического семейства областей общая вариационная задача (А.7) сводится к задаче нахождения максимума функции одной переменной:

$$V(p;x) \to \max_{p\in P}. \tag{A.29}$$

Особенностью этой задачи является то, что максимизируемая функция $V(p;x)$ на множестве $\{p \in P : p \le q(x)\}$ не зависит от p и совпадает с $g(x)$. Тем самым решение общей задачи максимизации (A.29) сводится к максимизации функции $V(p;x)$ по p на множестве $\{p \in P : p \ge q(x)\}$.

Наряду с задачей (A.29) для фиксированного состояния процесса x, представляет интерес и нахождение решения, которое было бы оптимальным при всех начальных состояниях процесса ξ_t, т.е. такого $p^* \in P$, что

$$V(p;x) \le V(p^*;x) \quad \text{для всех} \;\; p \in P,\, x \in D. \tag{A.30}$$

Соответствующий марковский момент τ_{p^*} можно рассматривать как "универсально оптимальный" момент остановки, подходящий для любого начального состояния процесса. Отметим, что при классическом подходе, когда задача оптимальной остановки рассматривается по *всем* марковским моментам $\mathfrak{M}$, роль "универсально оптимального" играет, обычно, момент первого выхода процесса из "области продолжения" (где оптимальное значение функционала задачи превосходит функцию выплат). Однако, во-первых, существуют примеры, когда момент первого выхода из области продолжения не является оптимальным (например, в [120, 139]), а, во-вторых, при вариационном подходе такая область продолжения может не входить в рассматриваемое семейство областей $\mathcal{G}$.

Можно дать следующие условия "универсальной оптимальности".

Утверждение A.1. *1) Если p^* удовлетворяет соотношениям (A.30), то выполнены следующие условия:*

$$V(p;x) \le V(p^*;x) \text{ при } p < p^*,\, x \in D, \tag{A.31}$$

$$V(p_1;x) \ge V(p_2;x) \text{ при } p^* \le p_1 < p_2,\; p_1 \le q(x) < p_2. \tag{A.32}$$

2) Если для некоторого $p^* \in P$ выполнены условия (A.31) и

$$V(p;x) \text{ не возрастает по } p \text{ при } p \ge p^* \text{ для любых } \; x \in D, \tag{A.33}$$

то справедливы соотношения (A.30).

Доказательство. 1) Неравенство в (A.31) прямо следует из неравенств (A.30). Теперь, если $p^* \le p_1 \le q(x) < p_2$, то $x \notin G_{p^*}$, $x \in G_{p_2} \setminus G_{p_1}$, и $V(p_1;x) = g(x) = V(p^*;x) \ge V(p_2;x)$, т.е. условие (A.32).

2) Достаточно показать, что $V(p;x) \le V(p^*;x)$ для любых $p > p^*$ и $x \in D$.

Пусть $p > p^*$. Если $x \notin G_p$, то $x \notin G_{p^*}$ (в силу монотонности областей), и значит, $V(p;x) = g(x) = V(p^*;x)$. Если $x \in G_{p^*}$, то $V(p;x) \le V(p^*;x)$ в силу (A.33). Когда $x \in G_p \setminus G_{p^*}$, т.е. $p^* \le q(x) < p$, то из (A.33) вытекает: $V(p;x) \le V(q(x);x) = g(x) = V(p^*;x)$. □

Как видно из доказанного утверждения, существует определенный "зазор" между необходимыми условиями (A.31), (A.32) и достаточными (A.31), (A.33). Тем не менее, в некоторых случаях из них можно вывести совпадающие необходимые и достаточные условия "универсальной оптимальности".

Так, для рассмотренного в разделе A.2 двумерного геометрического броуновского движения семейство областей $G_p = \{(x_1,x_2) \in R^2_+ : x_2 < px_1\}$, $p > 0$, является однопараметрическим. Для него выполнены условия монотонности и густоты (с граничной функцией $q(x_1,x_2) = x_2/x_1$).

Теорема A.1 дает явное представление для функции $V(p;x)$:

$$V(p;x) = \begin{cases} h(p)x_1^{q-\beta}x_2^{\beta}, & \text{при } q(x) < p, \\ g(x), & \text{при } q(x) \ge p, \end{cases}$$

где $h(p) = p^{-\beta}g(1,p)$.

Условие (A.31), очевидно, эквивалентно тому, что $h(p) \le h(p^*)$ при $p < p^*$. Также очевидно, что (A.33) равносильно невозрастанию $h(p)$ при $p \ge p^*$. С другой стороны, для любых $p^* \le p_1 < p_2$ и $p_1 = q(x)$, т.е. $x_2 = p_1x_1$, из (A.32) имеем:

$$V(p_2;x) = h(p_2)x_1^{q-\beta}x_2^{\beta} \le V(q(x);x) = g(x) = x_1^q g(1,p_1) = x_1^{q-\beta}x_2^{\beta}h(p_1),$$

откуда $h(p_2) \le h(p_1)$.

Таким образом, Утверждение A.1 дает сформулированные в Теореме A.2 условия (A.18)–(A.19), необходимые и достаточные для "универсальной оптимальности" момента остановки τ_{p^*} по классу марковских моментов $\mathcal{M}_0$ в задаче оптимальной остановки двумерного геометрического броуновского движения и однородной функции выплат.